Spectral multipliers and Riesz means on manifolds, groups and graphs

Georgiadis, Athanasios

DOI (link to publication from Publisher):
10.12681/eadd/24652

Publication date:
2011

Document Version
Early version, also known as pre-print

Citation for published version (APA):
Georgiadis, A. (2011). *Spectral multipliers and Riesz means on manifolds, groups and graphs*. Aristotle University of Thessaloniki. https://doi.org/10.12681/eadd/24652

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεσσαλονίκη, Μάιος 2011

Διδακτορικη Διατριβη

ΘΕΜΑ:

Φασματικοι Πολλαπλασιαστες και Μεσοι Όροι Riesz σε Πολλαπλοτητες, Ομαδες και Γραφηματα

Αθανάσιος Γ. Γεωργιάδης

Υπότροφος Κοινωφελούς Ιδρύματος Αλάξανδρου Σ. Ωνάση.

Επιβλέπων Καθηγητής: Μ. Γ. Μαριάς

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 1

1 Δύο προβλήματα στον Ευκλείδειο χώρο 5

1.1 Το πρόβλημα των πολλαπλασιαστών 5

1.1.1 Το πρόβλημα των πολλαπλασιαστών στον $\mathbb{R}^n$ 5

1.1.2 Γενικεύσεις και ανάλογα του Θεωρήματος 1.1.2. 7

1.1.3 Γενικεύσεις και ανάλογα του Θεωρήματος 1.1.6. 8

1.1.4 Η συμβολή μας. 8

1.2 Το πρόβλημα των μέσων όρων Riesz 8

1.2.1 Μέσοι όροι Riesz στον $\mathbb{R}^n$. 9

1.2.2 Μέσοι όροι Riesz σε άλλους χώρους 10

1.2.3 Η συμβολή μας. 10

2 Φασματικοί πολλαπλασιαστές σε πολλαπλότητες 11

2.1 Εισαγωγή 11

2.1.1 Παραδείγματα πολλαπλοτήτων 13

2.2 Διατύπωση του αποτελέσματος 14

2.2.1 Παραδείγματα φασματικών πολλαπλασιαστών 16

2.3 Προκαταρκτικά 16

2.3.1 L^2-εκτιμήσεις του πυρήνα της θερμότητας. 17

2.3.2 Ένα βασικό λήμμα. 19

2.3.3 Χώροι Hardy. 20

2.3.4 Ένα προσεγγιστικό Λήμμα 25

2.4 Πολλαπλασιαστές με συμπαγή φορέα 26

2.5 $H^1 - L^1$ συνέχεια. 33

2.6 Ιδιότητα της απαλοιφής 36

2.7 Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.3 40

3 Μέσοι όροι Riesz σε Γραφήματα και Διακριτές ομάδες 49

3.1 Εισαγωγή 49

3.2 Γραφήματα 49

3.3 Διακριτές Ομάδες 56

3.4 Διατύπωση του αποτελέσματος 63

3.5 Προετοιμασία για την απόδειξη 65

3.5.1 Διάσπαση του πολλαπλασιαστή 65

3.5.2 Προσεγγιστικό Λήμμα 69

3.6 Εκτιμήσεις των πυρήνων 71

3.6.1 Εκτιμήσεις των $p_n(x, y)$. 71

3.6.2 Εκτιμήσεις των $K_{j,r}(x, y)$. 73

3.7 Απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.3 75

Βιβλιογραφία 79

Εισαγωγή

Το πρόβλημα της L^p-συνέχειας των ιδιαζόντων ολοκληρωτικών τελεστών κατέχει μια πολύ σημαντική θέση στην Αρμονική Ανάλυση. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρόβλημα των πολλαπλασιαστών Fourier.

Αν $m(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n$ είναι μία φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε τον τελεστή T επί του L^2 από την

$$\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

και είναι φραγμένος αρχικά στον L^2 καθώς από τον τύπο του Plancherel είναι

$$||Tf||_2 = ||\widehat{Tf}||_2 \leq ||m||_\infty ||f||_2.$$

Αν $m = \widehat{K}$, τότε ο T έχει τη μορφή τελεστή συνέλιξης

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy,\ x \in \mathbb{R}^n,\ f \in L^2.$$

Το πρόβλημα είναι να βρεθούν συνθήκες επί της $m(\xi)$ κάτω από τις οποίες ο $K(x)$ να ικανοποιεί τη συνθήκη Hörmander,

$$\int_{||x-z|| \geq 2||y-z||} |K(x-y) - K(x-z)|dx < c,\ z \in \mathbb{R}^n,$$

ώστε ο T να επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή επί των $L^p,\ p \in (1,\infty),$ και από τον L^1 στον L^1_w.

Αν φύγουμε από τον $\mathbb{R}^n$ και πάμε σε άλλο χώρο μέτρου, δεν έχουμε στη διάθεσή μας το μετασχηματισμό Fourier και την ταυτότητα του Plancherel. Τα αντικαθιστά όμως το Φασματικό Θεώρημα. Θεωρούμε μη αρνητικό και αυτοσυζυγή τελεστή L και ορίζουμε για κάθε φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση m, τον τελεστή

$$m(L) = \int_0^\infty m(\lambda)dE_\lambda,$$

όπου dE_λ το φασματικό μέτρο του L, ο οποίος είναι αρχικά φραγμένος στον L^2 και $||m(L)||_{L^2 \to L^2} \leq ||m||_\infty$.

Με το πρόβλημα των πολλαπλασιαστών σε διάφορα γεωμετρικά πλαίσια έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές (βλ. Παράγραφο 1.1) όπως για παράδειγμα οι Hörmander, Mikhlin, Calderón, Torchinsky, Anker, Christ, Hebish, Lin, Lohoué, Mauceri. Μεγάλη είναι η ελληνική συμβολή καθώς το πρόβλημα έχει απασχολήσει για παράδειγμα τους Αλεξόπουλο, Κυρέζη, Μαντούβαλο και Μαριά.

Το 2010 δημοσιεύτηκε στο γαλλικό περιοδικό Bulletin des sciences mathématiques η εργασία μου με τίτλο

H^p-bounds for spectral multipliers on Riemannian manifolds,

στην οποία γενικεύεται το Θεώρημα των πολλαπλασιαστών σε πολλαπλότητες (βλ. Κεφάλαιο 2).

Ξεχωριστή θέση μεταξύ των πολλαπλασιαστών κατέχουν οι μέσοι όροι Riesz (βλ. Παρ. 1.2),

$$m_{\alpha,R}f(x) = \int_{|\xi|<R} \widehat{f}(\xi)\Big(1-\frac{|\xi|^2}{R^2}\Big)^{\alpha} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi \ , \ f\in L^2, \ x\in\mathbb{R}^n, \ n\geq 2, \ \alpha, R>0.$$

Αυτοί απασχόλησαν μαθηματικούς όπως για παράδειγμα τους Stein, Fefferman, Carleson, Sjölin, Αλεξόπουλο, Berard, Lohoué, Sogge και Tao.

Το πρόβλημα της L^p συνέχειας των μέσων όρων Riesz παραμένει μέχρι σήμερα ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$.

Το 2011 σε συνεργασία με τον Α. Φωτιάδη υποβάλαμε εργασία με τίτλο

Riesz means on graphs and discrete groups,

στην οποία μελετάμε τους μέσους όρους Riesz σε γραφήματα και διακριτές ομάδες (βλ. Κεφ. 3).

Στην παρούσα διατριβή έχουμε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο δίνονται αναλυτικά τα προβλήματα που μας απασχόλησαν στον $\mathbb{R}^n$. Αναφέρονται γνωστές επεκτάσεις τους μαζί με τη δική μας. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται η πρώτη μου εργασία και στο τρίτο η δεύτερη.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επταμελή επιτροπή για τη βοήθεια και τις παρατηρήσεις της στη διατριβή μου.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ το Κοινωφελές Ίδρυμα Αλέξανδρου Σ. Ωνάση για την οικονομική υποστήριξη που μου παρείχε κατά τη διάρκεια του διδακτορικού μου.

Αθανάσιος Γ. Γεωργιάδης

Θεσσαλονίκη, Μάιος 2011.

Κεφάλαιο 1

Δύο προβλήματα στον Ευκλείδειο χώρο

1.1 Το πρόβλημα των πολλαπλασιαστών

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε αρχικά στο πρόβλημα των πολλαπλασιαστών στον $\mathbb{R}^n$. Στην συνέχεια θα δούμε επεκτάσεις σε άλλα γεωμετρικά πλαίσια. Θα αναφερθούμε τέλος στη δικιά μας συμβολή.

1.1.1 Το πρόβλημα των πολλαπλασιαστών στον $\mathbb{R}^n$

Ας είναι $m(\xi)$, μια φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τον τελεστή T_m από τη σχέση

$$\widehat{T_m f}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi), \quad f \in L^2, \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

όπου με $\widehat{f}$ συμβολίσαμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης f. Από το Θεώρημα του Plancherel, ο T_m είναι φραγμένος στον L^2, με

$$||T_m||_{2\to 2} \leq ||m||_\infty.$$

Ορισμός 1.1.1. Συναρτήσεις σαν την $m(\xi)$, θα τις καλούμε πολλαπλασιαστές (βλ. [62]).

Μας ενδιαφέρουν συνθήκες για τον πολλαπλασιαστή $m(\xi)$, ώστε ο τελεστής T_m να επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή επί των χώρων L^p, L^p_w.

Να θυμίσουμε ότι μια μετρήσιμη συνάρτηση f ανήκει

- στον χώρο L^p, $p > 0$, όταν

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty,$$

- στον χώρο L^p_w, $p > 0$, όταν

$$\sup_{\alpha>0} \alpha^p \mu\Big(\{x \in \mathbb{R}^n / |f(x)| > \alpha\}\Big) < \infty.$$

Έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα των Mikhlin-Hörmander (βλ. [35, 47, 62]):

Θεώρημα 1.1.2. *Αν ο $m(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{|\alpha|} |\partial^\alpha m(\xi)| < \infty, \tag{1.1.1}$$

για κάθε πολυδείκτη $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ με μήκος $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, τότε ο T_m επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή επί των L^p, $p \in (1, \infty)$, και από τον L^1 στον L^1_w.

Παρατήρηση 1.1.3. Υπάρχουν ασθενέστερες υποθέσεις από την (1.1.1) (βλ. [62]):

(1) Μπορούμε να υποθέσουμε αντί για τη συνθήκη (1.1.1) ότι ο πολλαπλασιαστής ικανοποιεί την

$$\sup_{R>0} R^{-n+2|\alpha|} \int_{R<|\xi|<2R} |\partial^\alpha m(\xi)|^2 d\xi < \infty \tag{1.1.2}$$

και πάλι για κάθε πολυδείκτη α με μήκος $|\alpha| \leq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

(2) Για την επόμενη ακόμα ασθενέστερη συνθήκη χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.4. Αν $A = N + \varepsilon$ με $\varepsilon \in (0, 1]$, $N \in \mathbb{N}$, για κάθε συνάρτηση f θέτουμε

$$||f||_{\mathcal{C}^A} = \sum_{\nu=0}^{N} ||f^{(\nu)}||_\infty + \sup\left\{ \frac{|f^{(N)}(x+t) - f^{(N)}(x)|}{t^\varepsilon} : \ t > 0, \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Σταθεροποιούμε μια συνάρτηση $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, με

$$\eta(\xi) = 1, \ 1 \leq |\xi| \leq 2 \ , \ \eta(\xi) = 0, \ |\xi| \in \Big(\frac{1}{2}, 2\Big)^c.$$

Υποθέτουμε ότι ο m ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\sup_{t>0} ||\eta(|.|)m(t.)||_{\mathcal{C}^A} < \infty, \tag{1.1.3}$$

για κάποιο $A > n/2$.

Κάτω από οποιαδήποτε από τις συνθήκες (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3), αν είναι $m = \widehat{K}$, τότε ο K ικανοποιεί τη συνθήκη Hörmander. Δηλαδή

$$\sup_{y\neq 0} \int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|dx < \infty. \tag{1.1.4}$$

Αυτή η συνθήκη είναι που μας εγγυάται ότι ο T_m επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή από τον L^1 στον L^1_w και με παρεμβολή και δυικότητα επί των L^p, $p \in (1,\infty)$ [62].

Παρατήρηση 1.1.5. Το Θεώρημα 1.1.2 γενίκευσαν σε χώρους Hardy οι Calderon και Torchinsky [11, 62] (αναλυτικά για χώρους Hardy βλέπε Κεφάλαιο 2). Πιό συγκεκριμένα:

Θεώρημα 1.1.6. *Αν ο $m(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, ικανοποιεί την (1.1.1) για κάθε πολυδείκτη α με μήκος $|\alpha| \leq \left[n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\right] + 1$, για κάποιο $p \in (0,1]$, τότε ο T_m επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή στον χώρο Hardy H^p.*

Παρατήρηση 1.1.7. Οι χώροι Hardy για $p > 1$ συμπίπτουν με τους αντίστοιχους χώρους L^p (βλ. [62]). Για αυτό μας ενδιαφέρουν για $p \leq 1$.

Παρατήρηση 1.1.8. Για την περίπτωση των χώρων H^p στις σχέσεις (1.1.2), (1.1.3) πρέπει να αντικαταστήσουμε το $n/2$ με $n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$.

1.1.2 Γενικεύσεις και ανάλογα του Θεωρήματος 1.1.2.

Υπάρχουν πολλές εργασίες στις οποίες γενικεύεται το Θεώρημα 1.1.2. Υπάρχουν επίσης και ανάλογά του. Αναφέρουμε κάποια βασικά.

Το 1989 ο M. Taylor απέδειξε ανάλογο του θεωρήματος των πολλαπλασιαστών σε πολλαπλότητες με φραγμένη γεωμετρία και εκθετική αύξηση όγκου [64].

Το 1990 οι G. Mauceri, S. Meda απέδειξαν ανάλογο του Θεωρήματος 1.1.2 σε stratified groups [50]. Την ίδια χρονιά ο J.P. Anker σε συμμετρικούς χώρους [5] και το

1991 ο M. Christ σε nilpotent groups [13].

Το 1994 ο Γ. Αλεξόπουλος ασχολήθηκε με την περίπτωση των Lie Groups, το 2000 με discrete groups και το 2004 με Μαρκοβιανές αλυσίδες [1, 2, 3].

Ο Ν. Μαντούβαλος και ο Μ. Μαριάς απέδειξαν ανάλογο του Θεωρήματος 1.1.2 σε Kleinian groups το 2006 (βλ. [44]). Ο Μ. Μαριάς απέδειξε ανάλογο του Θεωρήματος 1.1.2 σε συμμετρικούς χώρους σε συνεργασία με τον N. Lohoué το 2009 (βλ. [43]) και σε τοπικά συμμετρικούς χώρους το 2009 σε συνεργασία με τον Α. Φωτιάδη (βλ. [27]).

1.1.3 Γενικεύσεις και ανάλογα του Θεωρήματος 1.1.6.

Το 1987 οι L. De-Michele, G. Mauceri απέδειξαν ανάλογο του Θεωρήματος 1.1.6 σε stratified groups [22].

Το 2003 ο C.C. Lin απέδειξε ανάλογο του Θεωρήματος 1.1.6 στη ομάδα Heisenberg [42].

Το 2009 η Ι. Κυρέζη και ο Μ. Μαριάς απέδειξαν το ανάλογο του Θεωρήματος 1.1.6 σε Γραφήματα σε εργασία τους στο Transactions of A.M.S. [38].

1.1.4 Η συμβολή μας.

Το 2010 δημοσιεύτηκε εργασία μου στο περιοδικό Bulletin des Sciences Mathematiques στην οποία επεκτείνεται το Θεώρημα 1.1.6 σε πολλαπλότητες με πολυωνυμική αύξηση όγκου [28]. Αναλυτικά η απόδειξη βρίσκεται στο επόμενο κεφάλαιο.

1.2 Το πρόβλημα των μέσων όρων Riesz

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε αρχικά αποτελέσματα για τους μέσους όρους Riesz στον $\mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια θα δούμε άλλα γεωμετρικά πλαίσια και στο τέλος θα αναφερθούμε στη δικιά μας συνεισφορά.

1.2.1 Μέσοι όροι Riesz στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.2.1. Καλούμε μέσο όρο Riesz, τάξης $\alpha > 0$, τον τελεστή

$$m_{\alpha,R}f(x) = \int_{|\xi|<R} \widehat{f}(\xi)\Big(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2}\Big)^{\alpha} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi\ ,\ f \in L^2,\ x \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 2,\ R > 0. \tag{1.2.1}$$

Είναι αρχικά φραγμένος στον L^2. Το ενδιαφέρον μας είναι να εξετάσουμε τη συνέχειά του και στους υπόλοιπους χώρους L^p. Αναφέρουμε κάποια γνωστά αποτελέσματα (βλ. [10, 24, 62]).

(i) Αν $\alpha > \frac{n-1}{2}$ τότε ο $m_{\alpha,R}$ είναι φραγμένος στους L^p για κάθε $p \in [1,\infty]$.

(ii) Αν $\alpha \leq \frac{n-1}{2}$ και για κάποιο $p \in (1,\infty)$ ικανοποιείται η

$$\alpha > (n-1)\Big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big|,$$

τότε είναι φραγμένος στον L^p.

(iii) Αν για κάποιο

$$p \in \Big[\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1}\Big]^c$$

ισχύει

$$\alpha \leq n\Big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big| - \frac{1}{2},$$

τότε δεν είναι φραγμένος στον L^p.

(iv) Αν

$$\frac{n-1}{2(n+1)} \leq \alpha \leq \frac{n-1}{2}$$

και για κάποιο

$$p \in \Big[\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1}\Big]^c$$

ισχύει

$$\alpha > n\Big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big| - \frac{1}{2},$$

τότε είναι φραγμένος στον L^p.

(v) Αν $n = 2$ και για κάποιο

$$p \in \Big[\frac{4}{3}, 4\Big]^c$$

ισχύει
$$\alpha > 2\Big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big| - \frac{1}{2},$$
τότε είναι φραγμένος στον L^p.

Παρατήρηση 1.2.2. Βλέπουμε ότι για $n \geq 3$ το πρόβλημα παραμένει ανοικτό.

1.2.2 Μέσοι όροι Riesz σε άλλους χώρους

Με τους μέσους όρους Riesz σε διάφορα γεωμετρικά πλαίσια ασχολήθηκαν πολλόι ερευνητές. Για παράδειγμα το 1974 ο J.L. Clerc σε συμπαγείς ομάδες Lie [16].

Το 1980 ο P. Berard σε πολλαπλότητες [7].

Το 1984 ο G. Mauceri σε stratified groups [49] και μαζί με τον L. Giulini το 1991 σε μη-συμπαγείς συμμετρικούς χώρους [30]. Ο L. Giulini και ο G. Travaglini το 1991 σε συμπαγείς πολλαπλότητες [30].

Το 1987 ο G. Sogge ασχολήθηκε και αυτός με την περίπτωση των συμπαγών πολλαπλοτήτων [59].

Το 1994 ο Γ. Αλεξόπουλος και ο N. Lohoué ασχολήθηκαν με πολλαπλότητες θετικής καμπυλότητας και ομάδες Lie πολυωνυμικής αύξησης όγκου [4].

1.2.3 Η συμβολή μας.

Το 2011 ο Ανέστης Φωτιάδης και εγώ υποβάλαμε εργασία στην οποία μελετάμε τους μέσους όρους Riesz σε γραφήματα και διακριτές ομάδες [26]. Αναλυτικά τα συμπεράσματά μας και η απόδειξη βρίσκεται στο Κεφάλαιο 3.

Κεφάλαιο 2

Φασματικοί πολλαπλασιαστές σε πολλαπλότητες

2.1 Εισαγωγή

Ας είναι M μια $n-$διάστατη, πλήρης, μη συμπαγής πολλαπλότητα Riemann με $\mathcal{C}^{\infty}-$φραγμένη γεωμετρία. Αυτό σημαίνει ότι η injectivity radius της πολλαπλότητας είναι θετική και κάθε συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή καμπυλότητας είναι φραγμένη (βλ. [9, 52, 58, 63]).

Θα συμβολίζουμε με

$d(x, y)$ την γεωδαισιακή απόσταση,

dx το μέτρο Riemann,

$B(x, r)$ την μπάλλα με κέντρο το $x \in M$ και ακτίνα $r > 0$ και

$V(x, r)$ τον όγκο της $B(x, r)$.

Υποθέτουμε ότι η M ικανοποιεί τη ιδιότητα διπλασιασμού του όγκου, υπάρχει δηλαδή σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε

$$V(x, 2r) \leq cV(x, r), \;\; x \in M, \; r > 0. \tag{2.1.1}$$

Λήμμα 2.1.1. *Υπάρχουν σταθερές $c, D > 0$, τέτοιες ώστε*

$$\frac{V(x, r)}{V(x, t)} \leq c\left(\frac{r}{t}\right)^{D}, \; x \in M, \; r \geq t > 0. \tag{2.1.2}$$

Απόδειξη. Ας είναι $t > 0$. Από την (2.1.1) έχουμε ότι

$$V(x, 2t) \leq cV(x, t).$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, έχουμε επαγωγικά,

$$V(x, 2^n t) \leq c^n V(x, t).$$

Αν θέσουμε $D = \log_2 c$, τότε

$$V(x, 2^n t) \leq 2^{nD} V(x, t). \tag{2.1.3}$$

Αν $N \geq 0$, τότε είναι $N < [N] + 1 \leq N + 1$ και από την (2.1.3) έχουμε

$$\begin{aligned} V(x, 2^N t) &\leq V(x, 2^{[N]+1} t) \\ &\leq 2^{([N]+1)D} V(x, t) \\ &\leq 2^{ND} 2^D V(x, t) \\ &= c 2^{ND} V(x, t). \end{aligned}$$

Επιδή $r \geq t$, έχουμε

$$r = \left(\frac{r}{t}\right) t = 2^N t,$$

όπου $N = \log_2(\frac{r}{t})$. Επομένως

$$\begin{aligned} V(x, r) &= V(x, 2^N t) \\ &\leq c 2^{ND} V(x, t) \\ &= c \left(\frac{r}{t}\right)^D V(x, t). \end{aligned}$$

□

Θα συμβολίζουμε με Δ τον τελεστή Laplace-Beltrami στην M και με $p_t(x, y)$, $t > 0$, $x, y \in M$, τον πυρήνα της θερμότητας στην M (βλ. [52, 63]), δηλαδή τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης της θερμότητας

$$(\partial_t + \Delta) u = 0.$$

Υποθέτουμε ότι για τον πυρήνα της θερμότητας $p_t(x, y)$ ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις.

Α. Υπάρχουν σταθερές $c, c' > 0$ τέτοιες ώστε

$$p_t(x,y) \leq c' \frac{e^{-d(x,y)^2/ct}}{V(x,\sqrt{t})}, \tag{2.1.4}$$

για κάθε $t > 0$ και $x, y \in M$.

Β. Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ και $\gamma \in (0,1]$, τέτοιες ώστε για κάθε $t > 0$ και $x, y, z \in M$, με $d(y,z) \leq \sqrt{t}$,

$$|p_t(x,y) - p_t(x,z)| \leq \frac{c_1 e^{-c_2 d(x,y)^2/t}}{V(x,\sqrt{t})} \left(\frac{d(y,z)}{\sqrt{t}}\right)^{\gamma}. \tag{2.1.5}$$

2.1.1 Παραδείγματα πολλαπλοτήτων

1. Αν είναι $M = \mathbb{R}^n$, τότε είναι

$$V(x,r) = c_n r^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0.$$

Επομένως προκύπτουν οι (2.1.1), (2.1.2) και είναι $D = n$.

Είναι ακόμα

$$\Delta = -(\partial^2 x_1 + ... + \partial^2 x_n)$$

και ο πυρήνας της θερμότητας ικανοποιεί τις (2.1.4) και (2.1.5) με $\gamma = 1$.

2. Αν είναι M πολλαπλότητα με διάσταση n και $\mathrm{Ric}(M) \geq 0$ τότε ισχύουν οι (2.1.1) και (2.1.2) και είναι $D = n$ [8, 63].

Ισχύουν και οι εκτιμήσεις (2.1.4) και (2.1.5) με $\gamma = 1$ [41, 63].

3. Αν για την M υποθέσουμε την (2.1.1) και μια L^2-Poincaré ανισότητα, τότε προκύπτει (βλ. [31, 53, 55]) ότι ισχύουν οι (2.1.4) και (2.1.5).

4.(βλ. [1]) Ας είναι M μια συνεκτική ομάδα Lie. Έστω dg αριστερά αναλλοίωτο μέτρο Haar στην M και $|A|$ το $dg-$μέτρο ενός μετρήσιμου υποσυνόλου A της M. Υποθέτουμε ότι η M έχει πολυωνυμική αύξηση όγκου. Αν δηλαδή U είναι συμπαγής περιοχή του ουδέτερου στοιχείου e της M, τότε υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για το σύνολο $U^n = \{x_1 x_2 ... x_n / x_1, x_2, ..., x_n \in U\}$ να ισχύει

$$|U^n| \leq c n^c\ ,\ n \in \mathbb{N}.$$

Προκύπτει τότε (βλ.[32]) ότι υπάρχει ακέραιος D_∞ ώστε

$$\frac{1}{c}n^{D_\infty} \leq |U^n| \leq cn^{D_\infty} \ , \ n \to \infty.$$

Θεωρούμε $X_1, ..., X_n$ αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία της G που ικανοποιούν τη συνθήκη Hörmander. Σε αυτά τα πεδία αντιστοιχεί με κανονικό τρόπο μιά απόσταση $d(x,y)$ αριστερά αναλλοίωτη και συμβατή με την τοπολογία της M (βλ. [19]). Τότε υπάρχει σταθερά D_0 ώστε

$$\frac{1}{c}r^{D_0} \leq V(x,r) \leq cr^{D_0} \ , \ r < 1 \ , \ \ \frac{1}{c}r^{D_\infty} \leq V(x,r) \leq cr^{D_\infty} \ , \ r \geq 1.$$

Επομένως, προκύπτουν οι (2.1.1) και (2.1.2) με

$$D = \max(D_0, D_\infty).$$

Ορίζουμε τώρα διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης

$$\Delta = -(X_1^2 + ... + X_n^2).$$

Για τον πυρήνα της θερμότητας του Δ ισχύουν οι (2.1.4) και (2.1.5) με $\gamma = 1$ (βλ. [56, 65]).

2.2 Διατύπωση του αποτελέσματος

Ο τελεστής Laplace-Beltrami Δ στην M είναι ένας θετικός και αυτοσυζυγής τελεστής στον $L^2(M)$ (βλ. [52, 63]). Επομένως, από το Φασματικό Θεώρημα ισχύει (βλ. [66])

$$\Delta = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda,$$

όπου dE_λ το φασματικό μέτρο του L στην M.

Ορισμός 2.2.1. Ας είναι $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη και *Borel* μετρήσιμη συνάρτηση. Από το Φασματικό Θεώρημα ορίζουμε τον τελεστή

$$m(\Delta) = \int_0^\infty m(\lambda) dE_\lambda,$$

που είναι φραγμένος στον $L^2(M)$, με $||m(\Delta)||_{2\to 2} \leq ||m||_\infty$. Η συνάρτηση m καλείται πολλαπλασιαστής και ο τελεστής $m(\Delta)$ φασματικός πολλαλασιαστής.

Ορισμός 2.2.2. Αν D, γ οι σταθερές που εμφανίζονται στις (2.1.2) και (2.1.5) ορίζουμε τη σταθερά

$$p_0 = \frac{D}{D+\gamma}.$$

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε

- $f \in \mathcal{C}_0(X)$ όταν η f έχει συμπαγή φορέα στο σύνολο X.
- $f \in \mathcal{C}^n(X)$ όταν η f έχει $n \in \mathbb{N}$ συνεχείς παραγώγους στο σύνολο X.

Για κάθε συνάρτηση $f \in C_0^n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ και για $A = n + \alpha$ με $\alpha \in (0,1]$, θέτουμε

$$M_A(f) = \sup\left\{\frac{|f^{(n)}(x+t) - f^{(n)}(x)|}{t^\alpha};\ t>0,\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}^A(\mathbb{R})$ το χώρο Lipschitz τάξης $A > 0$, των συναρτήσεων f που ικανοποιούν τη σχέση

$$||f||_{\mathcal{C}^A(\mathbb{R})} = \sum_{\nu=0}^{n} ||f^{(\nu)}||_\infty + M_A(f) < \infty.$$

Με $H^p = H^p(M)$ θα συμβολίζουμε τους χώρους Hardy για $p \in (p_0, 1]$ (λεπτομέρειες στη 2.3.3).

Θεωρούμε μια συνάρτηση

$$0 \leq \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

με

$$\phi(t) = 1,\ t \in [1,2], \quad \phi(t) = 0,\ t \in \left(\tfrac{1}{2}, 4\right)^c.$$

Θα αποδείξουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 2.2.3. *Αν M είναι μία πολλαπλότητα Riemann όπως παραπάνω, $p \in (p_0, 1]$ και $m(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, πολλαπλασιαστής που ικανοποιεί την συνθήκη*

$$\sup_{t>0} ||\phi(.)m(t.)||_{\mathcal{C}^A} < \infty \tag{2.2.1}$$

για κάποιο

$$A > D\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right),$$

τότε ο τελεστής $m(\Delta)$ είναι φραγμένος στον χώρο Hardy H^p.

Παρατήρηση 2.2.4. Από παρεμβολή και δυικότητα, το Θεώρημα 2.2.3 δίνει ότι αν $A > D/2$, τότε ο $m(\Delta)$ είναι φραγμένος στους $L^p(M)$, για $1 < p < \infty$, και στον χώρο BMO των συναρτήσεων φραγμένης μέσης κύμανσης.

Παρατήρηση 2.2.5. Ο πολλαπλασιαστής $m(\lambda) = \lambda^{i\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί την (2.2.1). Επομένως έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 2.2.6. *Αν M είναι μία πολλαπλότητα Riemann όπως παραπάνω, τότε για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$, οι φανταστικές δυνάμεις της Λαπλασιανής $\Delta^{i\beta}$ είναι φραγμένες στους H^p , $p \in (p_0, 1]$.*

Παρατήρηση 2.2.7. Το διακριτό ανάλογο του Θεωρήματος 2.2.3 απέδειξε η Ι. Κυρέζη και ο Μ. Μαριάς και στο [38]. Το Πόρισμα 2.2.6 γενικεύει το Θεώρημα του Μ. Μαριά και του Ε. Russ στο [46] για $p < 1$.

2.2.1 Παραδείγματα φασματικών πολλαπλασιαστών

Κάποια ενδιαφέροντα παραδείγματα φασματικών πολλαπλασιαστών είναι οι μέσοι όροι Riesz και οι ταλαντούμενοι πολλαπλασιαστές (βλ. [3, 20, 25, 45]).

Οι Riesz μέσοι όροι τάξης $\alpha > 0$, ορίζονται ως η οικογένεια τελεστών

$$m_{\alpha,R}(\Delta) = \int_0^\infty \Big(1 - \frac{\lambda}{R}\Big)_+^\alpha dE_\lambda,\ R > 0.$$

Οι ταλαντούμενοι πολλαπλασιαστές είναι του τύπου

$$m_{\alpha,\beta}(\lambda) = \psi(|\lambda|)|\lambda|^{-\beta/2} e^{i|\lambda|^{\alpha/2}},\ \alpha, \beta > 0,$$

όπου η συνάρτηση ψ είναι της κλάσης $\mathcal{C}^\infty$ και μηδενίζεται όταν $|\lambda| \leq 1$ ενώ είναι $\psi(\lambda) = 1,\ |\lambda| \geq 2$.

Για αποτελέσματα σε Riesz μέσους όρους και ταλαντούμενους πολλαπλασιαστές πάνω σε πολλαπλότητες, παραπέμπουμε στα [4, 45].

2.3 Προκαταρκτικά

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε κάποια βασικά στοιχεία για την απόδειξη.

2.3.1 L^2-εκτιμήσεις του πυρήνα της θερμότητας.

Θα αποδείξουμε 2 λήμματα για τον πυρήνα της θερμότητας $p_t(x,y)$.

Λήμμα 2.3.1. *(i) Υπάρχει σταθερά $c>0$, τέτοια ώστε για κάθε $y \in M$ και κάθε $j \in \mathbb{Z}$, να ισχύει*

$$||p_{2^j}(.,y)||_2 \leq \frac{c}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}. \tag{2.3.1}$$

(ii) Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$, τέτοιες ώστε για κάθε $y \in M$, και κάθε $j, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq j$, να ισχύει

$$||p_{2^j}(.,y)||_{L^2(B(y,2^{q/2})^c)} \leq \frac{c_1 e^{-c_2 2^{q-j}}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}. \tag{2.3.2}$$

Απόδειξη. (i) Από τη σχέση (2.1.4) και τη (2.1.2) έχουμε

$$\begin{aligned} ||p_{2^j}(.,y)||_2^2 &= \int_M p_{2^j}(x,y)^2 dx \\ &= p_{2\cdot 2^j}(y,y) \\ &\leq \frac{c}{V(y,\sqrt{2\cdot 2^j})} \\ &\leq \frac{c}{V(y,2^{j/2})}, \end{aligned}$$

που δίνει τη (2.3.1).

(ii) Θέτουμε

$$A_s(y) = B(y, 2^{(s+1)/2}) - B(y, 2^{s/2}),\ s \in \mathbb{Z}\ ,\ y \in M.$$

Έχουμε

$$B(y,2^{q/2})^c = \bigcup_{s=q}^{\infty} A_s(y).$$

Ισχύει τότε

$$x \in A_s(y) \Rightarrow d(x,y) \geq 2^{s/2}.$$

Από τη σχέση (2.1.4) και τη (2.1.2) έχουμε

$$\begin{aligned}
||p_{2^j}(.,y)||^2_{L^2(A_s(y))} &\leq \int_{A_s(y)} \frac{c}{V(y,\sqrt{2^j})^2} e^{-2cd(x,y)^2/2^j} dx \\
&\leq \frac{c}{V(y,\sqrt{2^j})^2} e^{-c2^{(s-j)}} \int_{A_s(y)} dx \\
&= \frac{c}{V(y,\sqrt{2^j})^2} e^{-c2^{(s-j)}} |A_s(y)| \\
&\leq \frac{c}{V(y,2^{j/2})} e^{-c2^{(s-j)}} \frac{V(y,2^{(s+1)/2})}{V(y,2^{j/2})} \\
&\leq \frac{c}{V(y,2^{j/2})} e^{-c2^{(s-j)}} 2^{D(s-j)/2} \\
&\leq \frac{ce^{-c2^{(s-j)}}}{V(y,2^{j/2})}
\end{aligned}$$

επομένως έχουμε

$$||p_{2^j}(.,y)||_{L^2(A_s(y))} \leq \frac{ce^{-c2^{(s-j)}}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}$$

και αθροίζοντας για $s \geq q$ παίρνουμε

$$||p_{2^j}(.,y)||_{L^2(B(y,2^{q/2})^c)} \leq \sum_{s=q}^{\infty} \frac{ce^{-c2^{(s-j)}}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}} \leq \frac{ce^{-c2^{(q-j)}}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}.$$

□

Λήμμα 2.3.2. *(i) Υπάρχει σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε για κάθε $y, z \in M$ και κάθε $j \in \mathbb{Z}$, με $d(y,z) \leq 2^{j/2}$ να ισχύει*

$$||p_{2^j}(.,y) - p_{2^j}(.,z)||_2 \leq \frac{c}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}} \left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}. \tag{2.3.3}$$

(ii) Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$, τέτοιες ώστε για κάθε $y, z \in M$, και κάθε $j, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq j$, με $d(y,z) \leq 2^{j/2}$ να ισχύει

$$||p_{2^j}(.,y) - p_{2^j}(.,z)||_{L^2\left(B\left(y,2^{q/2}\right)^c\right)} \leq \frac{c_1 e^{-c_2 2^{q-j}}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}} \left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}. \tag{2.3.4}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται όπως του Λήμματος 2.3.1 με χρήση της σχέσης (2.1.5) αντί της (2.1.4). □

2.3.2 Ένα βασικό λήμμα.

Ορισμός 2.3.3. Ορίζουμε τον τελεστή της θερμότητας

$$P^t f(x) = e^{-t\Delta} f(x) = \int_M p_t(x,y) f(y) dy, \ f \in C_0^\infty(M), \ x \in M, \ t > 0.$$

Λήμμα 2.3.4. *Υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $\delta \in (0,1)$, τέτοιες ώστε για κάθε $q, j \in \mathbb{Z}$, με $q \geq j$, και κάθε $x \in A_q(y)$ και $|t| \leq \delta 2^{(q-j)/2}$ να ισχύει*

$$\left| e^{itP^{2^j}} p_{2^j}(x,y) \right| \leq \frac{ce^{-c2^{(q-j)/2}}}{V(y, 2^{j/2})}. \tag{2.3.5}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$e^{itP^{2^j}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(it)^n}{n!} \left(P^{2^j}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(it)^n}{n!} P^{n2^j}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \left| e^{itP^{2^j}} p_{2^j}(x,y) \right| &\leq \sum_{n \geq 0} \frac{|t|^n}{n!} |P^{n2^j} p_{2^j}(x,y)| \\ &= \sum_{n \leq 2^{(q-j)/2}} \frac{|t|^n}{n!} |p_{(n+1)2^j}(x,y)| \\ &+ \sum_{n > 2^{(q-j)/2}} \frac{|t|^n}{n!} |p_{(n+1)2^j}(x,y)| \\ &:= S_1 + S_2. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Εκτίμηση του S_1. Από τη σχέση (2.1.4) για κάθε $x \in A_q(y)$ και $n \leq 2^{(q-j)/2}$ παίρνουμε με κατάληλη τιμή του δ

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{n \leq 2^{(q-j)/2}} \frac{|t|^n}{n!} c \exp\left(\frac{-cd(x,y)^2}{(n+1)2^j}\right) V(y, ((n+1)2^j)^{1/2})^{-1} \\ &\leq c \exp\Big(-c \frac{2^q}{(2 \cdot 2^{(q-j)/2} 2^j)}\Big) V(y, 2^{j/2})^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} \\ &\leq c \exp\big(-c 2^{(q-j)} 2^{-(q-j)/2}\big) V(y, 2^{j/2})^{-1} e^{|t|} \\ &\leq cV(y, 2^{j/2})^{-1} e^{-c2^{(q-j)/2}} e^{\delta 2^{(q-j)/2}} \\ &\leq cV(y, 2^{j/2})^{-1} e^{-c2^{(q-j)/2}}. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Εκτίμηση του S_2. Από τη (2.1.4) και το γεγονός ότι

$$\frac{1}{n!} \leq c\left(\frac{e}{n}\right)^n,$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} S_2 &\leq cV(y,2^{j/2})^{-1} \sum_{n>2^{(q-j)/2}} \frac{|t|^n}{n!} \\ &\leq cV(y,2^{j/2})^{-1} \sum_{n>2^{(q-j)/2}} \Big(\frac{e\delta 2^{(q-j)/2}}{2^{(q-j)/2}}\Big)^n \\ &\leq cV(y,2^{j/2})^{-1} \sum_{n>2^{(q-j)/2}} (e\delta)^n \\ &\leq cV(y,2^{j/2})^{-1} \sum_{n>2^{(q-j)/2}} e^{-cn} \\ &\leq cV(y,2^{j/2})^{-1} e^{-c2^{(q-j)/2}}. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

διαλέγοντας $\delta < e^{-c-1}$. Τότε η (2.3.5) έπεται των (2.3.6), (2.3.7) και (2.3.8) καθώς

$$\begin{aligned} \left| e^{itP^{2^j}} p_{2^j}(x,y) \right| &\leq S_1 + S_2 \\ &\leq cV(y,2^{j/2})^{-1} e^{-c2^{(q-j)/2}} \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

□

2.3.3 Χώροι Hardy.

Κάτω από τις υποθέσεις που κάναμε για την M, είναι ένας χώρος με μετρική και μέτρο που ικανοποιεί την ιδιότητα του διπλασιασμού του όγκου. Γίνεται δηλαδή χώρος ομογενούς τύπου κατά τη θεωρία των Coifman-Weiss (βλ. [17]). Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τους χώρους Hardy.

Ορισμός 2.3.5. Θεωρούμε $p \in (p_0, 1]$. Μια συνάρτηση a θα καλείται $p-$άτομο, όταν ισχύουν τα ακόλουθα,

(*i*) Είναι $supp(a) \subseteq B(y,r)$, για κάποια $y \in M$, $r > 0$.

(ii) Η μέση τιμή του είναι μηδέν, δηλαδή

$$\int_M a(x)dx = 0.$$

(iii) $||a||_\infty \leq V(y,r)^{-1/p}$.

Παρατήρηση 2.3.6. Τα άτομα είναι στοιχεία των L^q, $q \geq 1$, καθώς

$$\begin{aligned} ||a||_q^q &= \int_M |a(x)|^q dx \\ &= \int_{B(y,r)} |a(x)|^q dx \\ &\leq ||a||_\infty^q \int_{B(y,r)} dx \\ &= ||a||_\infty^q V(y,r) \\ &\leq V(y,r)^{(-q/p)+1}. \end{aligned}$$

Άρα

$$||a||_q \leq V(y,r)^{(-1/p)+(1/q)}\ ,\ q \geq 1.$$

Πιό συγκεκριμένα θα μας χρειαστούν οι σχέσεις

$$||a||_1 \leq V(y,r)^{1-(1/p)}, \quad ||a||_2 \leq V(y,r)^{(1/2)-(1/p)}. \tag{2.3.10}$$

Ορισμός 2.3.7. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f ανήκει στον χώρο Hardy H^1 όταν υπάρχει ακολουθία $(l_n)_\mathbb{N} \in \ell^1$ και ακολουθία $1-$ατόμων $(\alpha_n)_\mathbb{N}$ τέτοια ώστε η f να έχει την αναπαράσταση

$$f = \sum_{n=1}^\infty l_n \alpha_n.$$

Ορισμός 2.3.8. Για κάθε συνάρτηση $f \in H^1$, θέτουμε

$$||f||_{H^1} = \inf\Big\{\sum_{n=1}^\infty |l_n|; f = \sum_{n=1}^\infty l_n \alpha_n\Big\}.$$

Παρατήρηση 2.3.9. Ισχύει $H^1 \subseteq L^1$, καθώς για κάθε συνάρτηση $f = \sum\limits_{n=1}^\infty l_n a_n \in H^1$, έχουμε από τη (2.3.10)

$$\begin{aligned} ||f||_1 &= \Big|\Big|\sum_{n=1}^{\infty} l_n a_n\Big|\Big|_1 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |l_n| \cdot ||a_n||_1 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |l_n| < \infty. \end{aligned}$$

Ορισμός 2.3.10. Μια συνάρτηση ϕ θα λέμε ότι ανήκει στον $BMO(M)$ όταν ισχύει

$$||\phi||_{BMO}^2 = sup\Big\{\frac{1}{V(B)}\int_B |\phi(x) - \phi_B|^2 dx\Big\} < \infty. \tag{2.3.11}$$

όπου πήραμε το supremum πάνω από όλες τις μπάλες B και συμβολίσαμε με ϕ_B τη μέση τιμή της συνάρτησης ϕ στην μπάλλα B, δηλαδή

$$\phi_B = \frac{1}{V(B)}\int_B \phi(x)dx. \tag{2.3.12}$$

Λήμμα 2.3.11. *Υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε μπάλλα B και $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει*

$$||\phi - \phi_B||_{L^2(2^k B)} < c(k+1)V(2^k B)^{1/2}||\phi||_{BMO}. \tag{2.3.13}$$

Απόδειξη. Από την (2.3.11) έχουμε για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$||\phi - \phi_{2^m B}||_{L^2(2^m B)} \leq V(2^m B)^{1/2}||\phi||_{BMO}. \tag{2.3.14}$$

Γράφουμε ακόμα

$$\phi(x) - \phi_B = \phi(x) - \phi_{2^k B} + \sum_{m=1}^{k}(\phi_{2^m B} - \phi_{2^{m-1}B}). \tag{2.3.15}$$

Η (2.3.15) μας δίνει από την τριγωνική ανισότητα

$$\begin{aligned} &||\phi(x) - \phi_B||_{L^2(2^k B)} \\ \leq\ &||\phi(x) - \phi_{2^k B}||_{L^2(2^k B)} + \sum_{m=1}^{k} ||\phi_{2^m B} - \phi_{2^{m-1}B}||_{L^2(2^k B)}. \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Με χρήση της τριγωνικής ανισότητας του L^2, της (2.3.14) και της (2.1.1) έπεται ότι

$$\begin{aligned}
|\phi_{2^m B} - \phi_{2^{m-1}B}| &= \sqrt{\frac{1}{V(2^{m-1}B)} \int_{2^{m-1}B} |\phi_{2^m B} - \phi_{2^{m-1}B}|^2 dx} \\
&\leq \frac{1}{V(2^{m-1}B)^{1/2}} \sqrt{\int_{2^{m-1}B} |\phi_{2^m B} - \phi(x)|^2 dx} \\
&+ \frac{1}{V(2^{m-1}B)^{1/2}} \sqrt{\int_{2^{m-1}B} |\phi(x) - \phi_{2^{m-1}B}|^2 dx} \\
&\leq \frac{1}{V(2^{m-1}B)^{1/2}} V(2^{m-1}B)^{1/2} ||\phi||_{BMO} \\
&+ \frac{1}{V(2^{m-1}B)^{1/2}} \sqrt{\int_{2^m B} |\phi_{2^m B} - \phi(x)|^2 dx} \\
&\leq ||\phi||_{BMO} + \sqrt{\frac{V(2^m B)}{V(2^{m-1}B)}} ||\phi||_{BMO} \\
&\leq c||\phi||_{BMO}. \qquad (2.3.17)
\end{aligned}$$

Επίσης, από την (2.3.17) έχουμε

$$\begin{aligned}
||\phi_{2^m B} - \phi_{2^{m-1}B}||_{L^2(2^k B)} &= \sqrt{\int_{2^k B} |\phi_{2^m B} - \phi_{2^{m-1}B}|^2 dx} \\
&\leq \sqrt{\int_{2^k B} c^2 ||\phi||^2_{BMO} dx} \\
&\leq cV(2^k B)^{1/2} ||\phi||_{BMO}. \qquad (2.3.18)
\end{aligned}$$

Από (2.3.16), (2.3.14) και (2.3.18) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&||\phi - \phi_B||_{L^2(2^k B)} \\
&\leq V(2^k B)^{1/2} ||\phi||_{BMO} + \sum_{m=1}^{k} cV(2^k B)^{1/2} ||\phi||_{BMO} \\
&\leq c(k+1) V(2^k B)^{1/2} ||\phi||_{BMO}. \qquad (2.3.19)
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 2.3.12. Οι Fefferman-Stein (βλ. [25]) απέδειξαν στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$, ότι ο δυικός του H^1, είναι ο BMO, δηλαδή ο χώρος των συναρτήσεων φραγμένης μέσης κύμανσης. Οι Coifman-Weiss [17] επέκτειναν το αποτέλεσμα αυτό σε χώρους ομογενούς τύπου.

Για να ορίσουμε τους H^p, $p \in (p_0, 1)$, ορίζουμε πρώτα τους χώρους Lipschitz όπως οι Coifman-Weiss στο [17].

Ορισμός 2.3.13. Ας είναι $\alpha > 0$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f ανήκει στο χώρο Lipschitz- α και θα γράφουμε $f \in \mathcal{L}_\alpha$, όταν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε μπάλλα B και κάθε $x, y \in B$, να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq c(f)|B|^\alpha. \tag{2.3.20}$$

Η νόρμα του χώρου $||f||_{\mathcal{L}_\alpha}$ ορίζεται ως η μικρότερη από τις σταθερές $c(f)$ που ικανοποιούν τη (2.3.20). Ο χώρος $\mathcal{L}_\alpha$, εφοδιασμένος με αυτή τη νόρμα γίνεται χώρος Banach.

Ορισμός 2.3.14. Αν $p \in (p_0, 1)$,τότε θέτοντας $\alpha = (1/p) - 1$, ορίζουμε το χώρο Hardy$-p$, ως τον υποχώρο του δυικού του $\mathcal{L}_\alpha$, που περιέχει όλα τα γραμμικά συναρτησιακά της μορφής

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n \text{ , όπου } a_n = p - \text{άτομα και } (\lambda_n) \in l^p.$$

Θέτουμε

$$||f||_{H^p} = \inf \Big\{ \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^p \Big)^{1/p}; f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n \Big\}.$$

Ορίζουμε τότε τη μετρική

$$d(f, g) = ||f - g||_{H^p}$$

και έχουμε $(H^p)' = \mathcal{L}_\alpha$ (βλ. [17]).

Λήμμα 2.3.15. *Για κάθε $\alpha > 0$, κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{L}_\alpha$, κάθε μπάλλα B και $y \in B$, ισχύει*

$$||f - f(y)||_{L^2(B)} \leq ||f||_{\mathcal{L}_\alpha} |B|^{\alpha + (1/2)}.$$

Απόδειξη. Έχουμε από τον ορισμό του $\mathcal{L}_\alpha$,

$$
\begin{aligned}
||f - f(y)||_{L^2(B)} &= \Big(\int_B |f(x) - f(y)|^2 dx \Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\int_B ||f||^2_{\mathcal{L}_\alpha} |B|^{2\alpha} dx \Big)^{1/2} \\
&= ||f||_{\mathcal{L}_\alpha} |B|^\alpha \Big(\int_B dx \Big)^{1/2} \\
&= ||f||_{\mathcal{L}_\alpha} |B|^{\alpha + (1/2)}.
\end{aligned}
$$

Την παραπάνω σχέση επειδή είναι $\alpha = (1/p) - 1$ τη χρεισιμοποιούμε και ως εξής

$$
||f - f(y)||_{L^2(B)} \leq ||f||_{\mathcal{L}_\alpha} |B|^{(1/p)-(1/2)}. \tag{2.3.21}
$$

2.3.4 Ένα προσεγγιστικό Λήμμα

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα [21, 51].

Λήμμα 2.3.16. *Έστω συνάρτηση $f \in C_0^n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ και $A = n + \alpha$ με $\alpha \in (0, 1]$, τότε για κάθε $\lambda > 0$, υπάρχει συνεχής και ολοκληρώσιμη συνάρτηση ψ_λ και σταθερά $c > 0$, ανεξάρτητη του λ και της f, τέτοια ώστε*

$$
||\widehat{\psi}_\lambda||_\infty \leq c, \;\; \mathrm{supp}(\widehat{\psi}_\lambda) \subset [-\lambda, \lambda]
$$

και

$$
\|f - f * \psi_\lambda\|_\infty \leq c \frac{M_A(f)}{\lambda^A}.
$$

Παρατήρηση 2.3.17. Έχοντας υπόψη μας ότι

$$
||f||_{\mathcal{C}^A(\mathbb{R})} = \sum_{\nu=0}^{n} ||f^{(\nu)}||_\infty + M_A(f)
$$

από το Λήμμα 2.3.16, έχουμε ότι

$$
\|f - f * \psi_\lambda\|_\infty \leq \frac{c||f||_{\mathcal{C}^A(\mathbb{R})}}{\lambda^A}. \tag{2.3.22}
$$

2.4 Πολλαπλασιαστές με συμπαγή φορέα

Έστω $A > 0$ και $f \in \mathcal{C}_0^A(0,\infty)$. Ας είναι $K(x,y)$ ο πυρήνας του $f(\Delta)$. Δηλαδή

$$K(x,y) = (f(\Delta)\delta_y)(x),$$

όπου δ_y το μέτρο *Dirac*.

Θεωρούμε μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ στον $\mathcal{C}_0^A(0,\infty)$ με

$$\operatorname{supp}(f_j) \subset [2^{-j-1}, 2^{-j}],$$

Θέτουμε h_j τις συναρτήσεις

$$h_j(s) = f_j(-2^{-j}\log s)s^{-1}.$$

Τότε έχουμε $\operatorname{supp}(h_j) \subset [e^{-1}, e^{-1/2}]$. Επομένως καθώς έχουν συμπαγή φορέα και $f_j \in \mathcal{C}_0^A(0,\infty)$, θα είναι

$$||h_j||_\infty \leq c||f_j||_\infty \;\;,\; ||h_j||_{\mathcal{C}^A(\mathbb{R})} \leq c. \tag{2.4.1}$$

Παρατήρηση 2.4.1. Από τη σχέση

$$h_j(s) = f_j(-2^{-j}\log s)s^{-1}$$

αν $x = -2^{-j}\log s$ τότε προκύπτει

$$f_j(x) = h_j(e^{-2^j x})e^{-2^j x}.$$

Άρα

$$f_j(\Delta) = h_j(P^{2^j})P^{2^j},\; j \in \mathbb{Z}.$$

Μπορούμε συνεπώς να εκμεταλευτούμε τη (2.3.5).

Αν $K_j(x,y)$ είναι ο πυρήνας του $f_j(\Delta)$ τότε θα αποδείξουμε τα ακόλουθα λήμματα.

Λήμμα 2.4.2. *(i) Υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $j \in \mathbb{Z}$ και $y \in M$, να ισχύει*

$$||K_j(.,y)||_2 \leq \frac{c||f_j||_{\mathcal{C}^A}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}. \tag{2.4.2}$$

(ii) Επιπλέον αν $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq j$, τότε

$$||K_j(.,y)||_{L^2(B(y,2^{q/2})^c)} \leq \frac{c||f_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-A(q-j)/2}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}. \tag{2.4.3}$$

Απόδειξη. (i) Έχουμε $f_j(\Delta) = h_j(P^{2^j})P^{2^j}$. Από τη (2.4.1) και την εκτίμηση (2.3.1) των πυρήνων $p_{2^j}(x,y)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||K_j(.,y)||_2 &= ||f_j(\Delta)\delta_y(.)||_2 \\ &= ||h_j(P^{2^j})P^{2^j}\delta_y(.)||_2 \\ &\leq ||h_j||_\infty ||p_{2^j}(.,y)||_2 \\ &\leq \frac{c||h_j||_\infty}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}} \\ &\leq \frac{c||f_j||_{\mathcal{C}^A}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}. \end{aligned}$$

(ii) Για την απόδειξη της (2.4.3) παρατηρούμε αρχικά ότι

$$B(y,2^{q/2})^c = \bigcup_{s\geq q} A_s(y).$$

Επομένως

$$||K_j(.,y)||_{L^2(B(y,2^{q/2})^c)} \leq \sum_{s\geq q} ||K_j(.,y)||_{L^2(A_s(y))}.$$

Πρέπει επομένως να εκτιμήσουμε τους πυρήνες $K_j(x,y)$ στους δακτύλιους $A_s(y)$. Για αυτό θεωρούμε τις συναρτήσεις $\psi_{j,s}$, $s \geq q \geq j$, που δίνονται από το Λήμμα 2.3.16 ώστε οι $\widehat{\psi_{j,s}}$ να έχουν φορέα στο

$$\left[-\delta 2^{(s-j)/2}, \delta 2^{(s-j)/2}\right]$$

όπου το δ είναι όπως στο Λήμμα 2.3.4 και να ικανοποιούν την

$$||\widehat{\psi}_{j,s}||_\infty < c, \ \text{ και } \ ||h_j - h_j * \psi_{j,s}||_\infty \leq cM_A(h_j)2^{-A(s-j)/2}. \tag{2.4.4}$$

Έχουμε για τους πυρήνες $K_j(x,y)$,

$$\begin{aligned} K_j(x,y) &= h_j(P^{2^j})p_{2^j}(x,y) \\ &= (h_j - h_j*\psi_{j,s} + h_j*\psi_{j,s})(P^{2^j})p_{2^j}(x,y) \\ &= (h_j - h_j*\psi_{j,s})(P^{2^j})p_{2^j}(x,y) + (h_j*\psi_{j,s})(P^{2^j})p_{2^j}(x,y). \end{aligned}$$

Από τις (2.3.1), (2.4.4) και (2.4.1) έχουμε

$$\begin{aligned} \left\|(h_j - h_j*\psi_{j,s})(P^{2^j})p_{2^j}(.,y)\right\|_{L^2(A_s(y))} &\leq ||h_j - h_j*\psi_{j,s}||_\infty ||p_{2^j}(.,y)||_2 \\ &\leq cM_A(h_j)2^{-A(s-j)/2}||p_{2^j}(.,y)||_2 \\ &\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-A(s-j)/2}\frac{1}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Επίσης είναι,

$$\begin{aligned}
&\left\|(h_j * \psi_{j,s})\,(P^{2^j})p_{2^j}(.,y)\right\|^2_{L^2(A_s(y))} \\
&\leq \left\|(h_j * \psi_{j,s})\,(P^{2^j})p_{2^j}(.,y)\right\|^2_{L^\infty(A_s(y))} |A_s(y)| \\
&\leq \left\|(h_j * \psi_{j,s})\,(P^{2^j})p_{2^j}(.,y)\right\|^2_{L^\infty(A_s(y))} V(y, 2^{(s+1)/2}).
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Για κάθε $x \in A_s(y)$, από τον αντίστροφο *Fourier* και καθώς οι $\hat{\psi}_{j,s}$ έχουν φορέα στο $\left[-\delta 2^{(s-j)/2}, \delta 2^{(s-j)/2}\right]$, έπεται ότι

$$\begin{aligned}
(h_j * \psi_{j,s})\,(P^{2^j})p_{2^j}(x,y) &= \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\widehat{h_j * \psi_{j,s}}\Big)(t) e^{itP^{2^j}} dt\Big) p_{2^j}(x,y) \\
&= \Big(\int_{|t| \leq \delta 2^{(s-j)/2}} \hat{h}_j\,(t)\,\hat{\psi}_{j,s}(t) e^{itP^{2^j}} dt\Big) p_{2^j}(x,y).
\end{aligned}$$

Από τη (2.4.4) έχουμε

$$||\widehat{\psi}_{j,s}||_\infty < c.$$

Επιπλέον καθώς έχουμε την h_j να έχει φορέα στο διαστημα $[e^{-1}, e^{-1/2}]$ παίρνουμε

$$||\widehat{h}_j||_\infty \leq ||h_j||_1 \leq c||h_j||_\infty \leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}.$$

Από τη (2.3.5), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|(h_j * \psi_{j,s})\,(P_{2^j})p_{2^j}(x,y)| &\leq c \left\|\hat{h}_j\right\|_\infty \left\|\hat{\psi}_{j,s}\right\|_\infty \frac{e^{-2^{(s-j)/2}/c}}{V(y, 2^{j/2})} \delta 2^{(s-j)/2} \\
&\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A} \frac{e^{-2^{(s-j)/2}/c}}{V(y, 2^{j/2})}.
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Από τις (2.4.6), (2.4.7) και τη (2.1.1) έχουμε

$$\begin{aligned}
||h_j * \psi_{j,s}(P^{2^j})p_{2^j}(.,y)||_{L^2(A_s(y))} &\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A} \frac{e^{-2^{c(s-j)/2}}}{V(y, 2^{j/2})} \sqrt{V(y, 2^{(s+1)/2})} \\
&\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A} \frac{e^{-2^{c(s-j)/2}} 2^{(s-j)D/4}}{\sqrt{V(y, 2^{j/2})}} \\
&\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A} \frac{e^{-2^{c(s-j)/2}}}{\sqrt{V(y, 2^{j/2})}}.
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Τέλος από τη (2.4.5) και τη (2.4.8) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
||K_j(.,y)||_{L^2(A_s(y))} &\leq \left\|(h_j - h_j * \psi_{j,s})(P^{2^j})p_{2^j}(.,y)\right\|_{L^2(A_s(y))} \\
&+ ||h_j * \psi_{j,s}(P^{2^j})p_{2^j}(.,y)||_{L^2(A_s(y))} \\
&\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}\frac{2^{-A(s-j)/2}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}} + c||f_j||_{\mathcal{C}^A}\frac{e^{-2^{c(s-j)/2}}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}} \\
&\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}\frac{2^{-A(s-j)/2}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
||K_j(.,y)||_{L^2(B(y,2^{q/2})^c)} &\leq \sum_{s\geq q}||K_j(.,y)||_{L^2(A_s(y))} \\
&\leq \frac{c||f_j||_{\mathcal{C}^A}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}\sum_{s\geq q}2^{-A(s-j)/2} \\
&\leq \frac{c||f_j||_{\mathcal{C}^A}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}2^{-A(q-j)/2}
\end{aligned}$$

και η απόδειξη της (2.4.3) είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 2.4.3. Πρίν το επόμενο Λήμμα θυμίζουμε την υπόθεση.

B. Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ και $\gamma \in (0,1]$, τέτοιες ώστε για κάθε $t > 0$, και $x, y, z \in M$, με $d(y,z) \leq \sqrt{t}$,

$$|p_t(x,y) - p_t(x,z)| \leq \frac{c_1 e^{-c_2 d(x,y)^2/t}}{V(x,\sqrt{t})}\left(\frac{d(y,z)}{\sqrt{t}}\right)^{\gamma}. \tag{2.4.9}$$

Λήμμα 2.4.4. *(i) Υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $j \in \mathbb{Z}$, και κάθε $y, z \in M$ με $d(y,z) \leq 2^{j/2}$,*

$$||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_2 \leq c\frac{||f_j||_{\mathcal{C}^A}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}\left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}. \tag{2.4.10}$$

(ii) Αν επιπλέον $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq j$, τότε

$$||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^2(B(y,2^{q/2})^c)} \leq c\frac{||f_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-A(q-j)/2}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}\left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}. \tag{2.4.11}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με του Λήμματος 2.4.2. Η διαφοροποίηση είναι ότι γράφουμε τις διαφορές

$$K_j(x,y) - K_j(x,z) = h_j(P^{2^j})(p_{2^j}(x,y) - p_{2^j}(x,z))$$

και κάνουμε χρήση των εκτιμήσεων (2.3.3) και (2.3.4) αντί των (2.3.1) και (2.3.2). $\square$

Λήμμα 2.4.5. *Αν $A > D/2$, τότε υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $j \in \mathbb{Z}$ και κάθε $y \in M$,*

(i) Για κάθε $z \in M$ με $d(y,z) \leq 2^{j/2}$,

$$||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq 2d(y,z)\})} \leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}\left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}.$$

(ii) Αν $q \geq j$, τότε

$$||K_j(.,y)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq 2^{q/2}\})} \leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}\frac{2^{(A-D/2)j/2}}{2^{(A-D/2)q/2}}.$$

(iii) Για κάθε $z \in M$ με $d(y,z) \geq 2^{j/2}$

$$||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq 4d(y,z)\})} \leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}\frac{2^{(A-D/2)j/2}}{d(y,z)^{(A-D/2)}}.$$

Απόδειξη. (i) Έχουμε

$$\begin{aligned} & ||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq 2d(y,z)\})} \\ \leq\ & ||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(B(y,2^{j/2}))} \\ +\ & \sum_{q=j}^{\infty} ||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(A_q(y))}. \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Scwarz και τη (2.4.10) έχουμε

$$\begin{aligned} ||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(B(y,2^{j/2}))} &\leq V(y,2^{j/2})^{1/2}||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_2 \\ &\leq V(y,2^{j/2})^{1/2} c\frac{||f_j||_{\mathcal{C}^A}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}\left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma} \\ &\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}\left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}. \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Scwarz, τη (2.4.11) και τη (2.1.1) έχουμε για κάθε $q \geq j$,

$$\begin{aligned}
||K_j(.,y)-K_j(.,z)||_{L^1(A_q(y))} &\leq |A_q(y)|^{1/2}||K_j(.,y)-K_j(.,z)||_{L^2(A_q(y))}\\
&\leq |A_q(y)|^{1/2}c\frac{||f_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-A(q-j)/2}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}\left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}\\
&\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-A(q-j)/2}2^{D(q-j)/4}\left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}\\
&\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-(A-D/2)(q-j)/2}\left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}. \quad (2.4.14)
\end{aligned}$$

Καθώς έχουμε $A > D/2$, αθροίζουμε ως προς q στη σχέση (2.4.14) και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=j}^{\infty}||K_j(.,y)-K_j(.,z)||_{L^1(A_q(y))}\\
\leq\ &\sum_{q=j}^{\infty}c||f_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-(A-D/2)(q-j)/2}\left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}\\
\leq\ &c||f_j||_{\mathcal{C}^A}\left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}. \qquad (2.4.15)
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (2.4.12), (2.4.13) και (2.4.15) έχουμε τελικά

$$\begin{aligned}
&||K_j(.,y)-K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M;d(x,y)\geq 2d(y,z)\})}\\
\leq\ &||K_j(.,y)-K_j(.,z)||_{L^1(B(y,2^{j/2}))}\\
+\ &\sum_{q=j}^{\infty}||K_j(.,y)-K_j(.,z)||_{L^1(A_q(y))}\\
\leq\ &c||f_j||_{\mathcal{C}^A}\left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}.
\end{aligned}$$

(ii) Αρχικά γράφουμε

$$||K_j(.,y)||_{L^1(\{x\in M;d(x,y)\geq 2^{q/2}\})}\leq\sum_{s=q}^{\infty}||K_j(.,y)||_{L^1(A_s(y))}. \qquad (2.4.16)$$

Από την ανισότητα Cauchy-Scwarz, τη σχέση

$$||K_j(.,y)||_{L^2(A_s(y))}\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}\frac{2^{-A(s-j)/2}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}}$$

και τη (2.1.1) έχουμε για κάθε $s \geq q$,

$$\begin{aligned} ||K_j(.,y)||_{L^1(A_s(y))} &\leq |A_s(y)|^{1/2}||K_j(.,y)||_{L^2(A_s(y))} \\ &\leq |A_s(y)|^{1/2}c||f_j||_{\mathcal{C}^A}\frac{2^{-A(s-j)/2}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}} \\ &\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-A(s-j)/2}2^{D(s-j)/4} \\ &= c||f_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-(A-D/2)(s-j)/2}. \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Από την υπόθεση ότι $A > D/2$ αθροίζοντας τη (2.4.17) έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{s=q}^{\infty}||K_j(.,y)||_{L^1(A_s(y))} &\leq \sum_{s=q}^{\infty}c||f_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-(A-D/2)(s-j)/2} \\ &\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-(A-D/2)(q-j)/2}. \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Η απόδειξη τελειώνει από τις σχέσεις (2.4.16) και (2.4.18).

(iii) Παρατηρούμε ότι

$$\{x \in M/d(x,y) \geq 4d(y,z)\} \subseteq \{x \in M/d(x,y) \geq d(y,z)\}.$$

Επίσης αν $d(x,y) \geq 4d(y,z)$ τότε από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z) \geq 4d(y,z) - d(y,z) = 3d(y,z) \geq d(y,z)$$

επομένως έχουμε και

$$\{x \in M/d(x,y) \geq 4d(y,z)\} \subseteq \{x \in M/d(x,z) \geq d(y,z)\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} & ||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M;d(x,y)\geq 4d(y,z)\})} \\ \leq\ & ||K_j(.,y)||_{L^1(\{x\in M;d(x,y)\geq d(y,z)\})} \\ +\ & ||K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M;d(x,z)\geq d(y,z)\})}. \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Θεωρούμε τον ακέραιο j_0 για τον οποίο ισχύει

$$2^{j_0/2} \leq d(y,z) < 2^{(j_0+1)/2}.$$

Είναι προφανώς $j \leq j_0$ και

$$\{x \in M; d(x,y) \geq d(y,z)\} \subseteq B(y, 2^{j_0/2})^c,$$

$$\{x \in M; d(x,z) \geq d(y,z)\} \subseteq B(z, 2^{j_0/2})^c.$$

Από το (ii) έχουμε καθώς $A > D/2$,

$$\begin{aligned} ||K_j(.,y)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq d(y,z)\})} &\leq ||K_j(.,y)||_{L^1(B(y,2^{j_0/2})^c)} \\ &\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A} 2^{-(A-D/2)(j_0-j)/2} \\ &\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A} \frac{2^{(A-D/2)j/2}}{d(y,z)^{(A-D/2)}}. \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

$$\begin{aligned} ||K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,z)\geq d(y,z)\})} &\leq ||K_j(.,z)||_{L^1(B(z,2^{j_0/2})^c)} \\ &\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A} 2^{-(A-D/2)(j_0-j)/2} \\ &\leq c||f_j||_{\mathcal{C}^A} \frac{2^{(A-D/2)j/2}}{d(y,z)^{(A-D/2)}}. \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Συνδιάζουμε τις (2.4.19), (2.4.20), (2.4.21) και έχουμε

$$\begin{aligned} & ||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq 4d(y,z)\})} \\ \leq\ & ||K_j(.,y)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq d(y,z)\})} \\ +\ & ||K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,z)\geq d(y,z)\})} \\ \leq\ & c||f_j||_{\mathcal{C}^A} \frac{2^{(A-D/2)j/2}}{d(y,z)^{(A-D/2)}}. \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

$\square$

2.5 $H^1 - L^1$ συνέχεια.

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε την ακόλουθη

Πρόταση 2.5.1. *Αν $m(\lambda)$ είναι ένας πολλαπλασιαστής όπως στο Θεώρημα 2.2.3, τότε ο $m(\Delta)$ είναι φραγμένος από τον H^1 στον L^1.*

Θεωρούμε, όπως στο [35], μια $\mathcal{C}^{\infty}$ συνάρτηση ϕ, για την οποία ισχύει

$$\mathrm{supp}(\phi) \subset (2^{-1}, 2) \ \text{και} \ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \phi(2^j t) = 1, \ \ t > 0.$$

Σπάμε τον πολλαπλασιαστή m σε κομμάτια m_j, $j \in \mathbb{Z}$, θέτοντας

$$m_j(s) = m(s)\phi(2^j s), \ j \in \mathbb{Z}. \tag{2.5.1}$$

Έχουμε τότε

$$\mathrm{supp}(m_j) \subset (2^{-j-1}, 2^{-j+1}), \ \ m(s) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} m_j(s). \tag{2.5.2}$$

Αν με $K(x,y)$ και $K_j(x,y)$ δηλώνουμε τους πυρήνες των $m(\Delta)$ και $m_j(\Delta)$ αντίστοιχα, είναι

$$K(x,y) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} K_j(x,y).$$

Θέτουμε

$$h_j(s) = m_j(-2^{-j}\log s)s^{-1}, \ j \in \mathbb{Z}.$$

Οι συναρτήσεις h_j έχουν συμπαγή φορέα και καθώς $||m_j||_{\mathcal{C}^A} \leq c$, θα είναι και

$$||h_j||_{\mathcal{C}^A} \leq c.$$

Ισχύει επίσης

$$m_j(\Delta) = h_j(P^{2^j})P_{2^j}, \ j \in \mathbb{Z}.$$

Μπορούμε επομένως να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου.

Απόδειξη της Πρότασης 2.5.1. Αρκεί να δείξουμε (βλ. [62]) ότι ο πυρήνας $K(x,y)$ του $m(\Delta)$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη Hörmander

Υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $y, z \in M$,

$$||K(.,y) - K(.,z)||_{L^1(\{x\in M;\ d(x,y)\geq 4d(y,z)\})} < c. \tag{2.5.3}$$

Έστω $y, z \in M$ και έστω $j_0 \in \mathbb{Z}$, τέτοιος ώστε

$$2^{j_0/2} < d(y,z) \leq 2^{(j_0+1)/2}.$$

Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
&||K(.,y) - K(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq 4d(y,z)\})}\\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} ||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq 4d(y,z)\})}\\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{j_0} ||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq d(y,z)\})}\\
&+ \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} ||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq 2d(y,z)\})}.
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Από το σκέλος (i) του Λήμματος 2.4.5 και καθώς

$$d(y,z) \leq 2^{(j_0+1)/2} \leq 2^{j/2},$$

για κάθε $j \geq j_0 + 1$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=j_0+1}^{+\infty} ||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq 2d(y,z)\})}\\
\leq\ & c \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} ||m_j||_{\mathcal{C}^A} \left(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\right)^{\gamma}\\
\leq\ & c \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} 2^{-\gamma(j-(j_0+1))/2} = c.
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Για να εκτιμήσουμε το πρώτο άθροισμα στη σχέση (2.5.4), παρατηρούμε ότι για $j \leq j_0$, είναι $d(y,z) \geq 2^{j_0/2} \geq 2^{j/2}$. Τότε από το σκέλος (iii) του Λήμματος 2.4.5 και καθώς

$$\frac{2^{(A-D/2)j/2}}{d(y,z)^{(A-D/2)}} \leq 2^{(A-D/2)(j-j_0)/2},$$

έχουμε αφού $A - (D/2) > 0$ ότι

$$\begin{aligned}&\sum_{j=-\infty}^{j_0} ||K_j(.,y) - K_j(.,z)||_{L^1(\{x\in M; d(x,y)\geq d(y,z)\})}\\ \leq\ & c\sum_{j=-\infty}^{j_0} 2^{(A-D/2)(j-j_0)/2} \leq c. \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Από τις σχέσεις (2.5.4), (2.5.5) και (2.5.6) έχουμε τη συνθήκη (2.5.3) η οποία μας δίνει την $H^1 - L^1$ συνέχεια του τελεστή $m(\Delta)$.

2.6 Ιδιότητα της απαλοιφής

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε την ακόλουθη ιδιότητα της απαλοιφής που θα χρειαστεί για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.3.

Πρόταση 2.6.1. *Για κάθε p-άτομο a, έχουμε ότι*

$$\int_M (m(\Delta)a)(x)dx = 0.$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το λήμμα

Λήμμα 2.6.2. *Για κάθε $y \in M$, $R > 0$ και $0 < \zeta < R$, υπάρχει μια $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση Φ_R στην πολλαπλότητα M τέτοια ώστε*

$$\Phi_R(x) \leq 1,\ x \in M,$$

και

$$\Phi_R = 1,\ \text{στη}\ B(y, R-\zeta),\ \Phi_R = 0,\ \text{στη}\ B(y, R+\zeta)^c.$$

Επιπλέον υπάρχει και σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $R > 0$,

$$|\Delta\Phi_R\,(x)| \leq c. \tag{2.6.1}$$

Απόδειξη. Αφού έχουμε υποθέσει ότι η M έχει $\mathcal{C}^\infty$-φραγμένη γεωμετρία, θα υπάρχει δίκτυο μπαλλών

$$\{B(x_m,\varepsilon)\}_{m\in\mathbb{N}}\ ,\ x_m \in M\ ,\ 0 < \varepsilon < r_0$$

όπου r_0 η injectivity radious της M, τέτοια ώστε οι διπλάσιες μπάλλες $B(x_m, 2\varepsilon)$ να είναι κάλυψη της M και να έχουν πεπερασμένη αλληλοτομή (βλέπε [58] σελ 66). Υπάρχει δηλαδή $N_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε κάθε μπάλλα $B(x_m, 2\varepsilon)$ στο δίκτυο να έχει μη κενή τομή με το πολύ N_0 άλλες μπάλλες.

Έστω $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, η διαμέριση της μονάδας που δίνει το δίκτυο $\{B(x_m, 2\varepsilon)\}_{m\in\mathbb{N}}$, [58].

Έχουμε τότε ότι

$$\varphi_m \in \mathcal{C}_0^\infty(B(x_m, 2\varepsilon))$$

και

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in M.$$

Επιπλέον για κάθε πολυδείκτη α, υπάρχει σταθερά $K_\alpha > 0$, τέτοια ώστε

$$|\partial_x^\alpha \varphi_m(x)| \leq K_\alpha, \tag{2.6.2}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, [58]. Ας είναι

$$N(R) = \{m \in \mathbb{N};\ \operatorname{supp}(\varphi_m) \cap B(y, R) \neq \emptyset\}.$$

Θέτουμε

$$\Phi_R(x) = \sum_{m\in N(R)} \varphi_m(x).$$

Επομένως η Φ_R είναι C^∞ και αν $\zeta = 2\varepsilon$, τότε

$$\Phi_R = 1, \text{ στη } B(y, R-\zeta), \text{ και } \Phi_R = 0, \text{ στη } B(y, R+\zeta)^c.$$

Απομένει να δείξουμε ότι η $\Delta\Phi_R$ είναι φραγμένη. Για αυτό θυμίζουμε ότι η Λαπλασιανή σε τοπικές συντεταγμένες μπορεί να γραφεί

$$\Delta = \sum_{|\alpha|\leq 2} c_\alpha(x)\partial_x^\alpha,$$

με τις συναρτήσεις $c_\alpha(x)$ να ικανοποιούν τη σχέση

$$|\partial_x^\beta c_\alpha(x)| \leq C_{\alpha,\beta}, \tag{2.6.3}$$

για κάθε $x \in M$, $y \in B(x, r_0)$ και κάθε πολυδείκτη β [62].

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η $\Delta\Phi_R$ έχει φορέα στο

$$S(R) = B(y, R+\zeta)\backslash B(y, R-\zeta).$$

Επίσης από την πεπερασμένη αλληλοτομή των $B(x_m, 2\varepsilon)$ έπεται ότι υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in S(R)$

$$\Phi_R(x) = \sum_{j \le N_0} \varphi_{m_j}(x).$$

Έχουμε

$$\Delta\Phi_R(x) = \sum_{|\alpha|\le 2} c_\alpha(x)\partial_x^\alpha \left(\sum_{j\le N_0} \varphi_{m_j}(x) \right) = \sum_{|\alpha|\le 2}\sum_{j\le N_0} c_\alpha(x)\partial_x^\alpha \varphi_{m_j}(x).$$

Αλλά από (2.6.2) και (2.6.3), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} |\Delta\Phi_R(x)| &\le \sum_{|\alpha|\le 2}\sum_{j\le N_0} |c_\alpha(x)||\partial_x^\alpha \varphi_{m_j}(x)| \\ &\le \sum_{|\alpha|\le 2}\sum_{j\le N_0} C_{\alpha,0}K_\alpha \le N_0 \sum_{|\alpha|\le 2} C_{\alpha,0}K_\alpha < c. \end{aligned}$$

Και το λήμμα έχει αποδειχθεί. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.6.1. Είναι $m(\lambda)$ συνεχής και υποθέτουμε $m(0) = 0$ (αλλιώς θα παίρναμε τον τελεστή $m - m(0)$). Επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, υπάρχει ένα $\eta > 0$, τέτοιο ώστε

$$|m(\lambda)| \le \varepsilon,\ \lambda \in [0, 2\eta].$$

Θέτουμε

$$m_\varepsilon(\lambda) = \psi(\lambda)m(\lambda),$$

όπου ψ είναι μια $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\psi(\lambda) \in [0,1],\ \psi = 0,\ \text{στο } [0,\eta],\ \text{και } \psi = 1,\ \text{στο } [2\eta, +\infty).$$

Επομένως ισχύει

$$||m - m_\varepsilon||_\infty \le \varepsilon.$$

Αν $p \le 1$, ας είναι a ένα p-άτομο με φορέα στη μπάλλα $B(y,r)$, $y \in M$, $r > 0$. Για κάθε $R > 0$, τέτοιο ώστε

$$V(y,R)^{1/2} \le \varepsilon^{-1/2} V(y,r)^{-1/2+1/p},$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και τη (2.3.10), έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_{B(y,R)} [(m(\Delta)-m_\varepsilon(\Delta))a](x)dx\right| &\leq V(y,R)^{1/2}||(m(\Delta)-m_\varepsilon(\Delta))a||_2 \\ &\leq V(y,R)^{1/2}||m-m_\varepsilon||_\infty ||a||_2 \\ &\leq \varepsilon V(y,R)^{1/2}V(y,r)^{1/2-1/p} \leq \sqrt{\varepsilon}. \qquad (2.6.4)\end{aligned}$$

Από την Πρόταση 2.5.1, οι τελεστές $m(\Delta)$ και $m_\varepsilon(\Delta)$ είναι φραγμένοι από τον H^1 στον L^1 και ένα p-άτομο είναι επίσης και 1-άτομο, άρα

$$\left|\int_M [(m(\Delta)-m_\varepsilon(\Delta))a](x)dx\right| \leq ||m(\Delta)a||_1 + ||m_\varepsilon(\Delta)a||_1 < c||a||_1 < \infty. \qquad (2.6.5)$$

Από τις (2.6.4), (2.6.5) έπεται ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_M m_\varepsilon(\Delta)a(x)dx = \int_M m(\Delta)a(x)dx. \qquad (2.6.6)$$

Θέτουμε τώρα

$$n_\varepsilon(\lambda) = \frac{m_\varepsilon(\lambda)}{\lambda},\ \lambda > 0.$$

Από τον ορισμό του ο πολλαπλασιαστής $m_\varepsilon(\lambda)$, και συνεπώς ο $n_\varepsilon(\lambda)$, είναι ταυτοτικά ίσος με μηδέν στο $[0,\eta]$. Επομένως ο $n_\varepsilon(\lambda)$ ικανοποιεί τη συνθήκη (2.2.1) όπως και ο $m(\lambda)$. Από την Πρόταση 2.5.1, ο τελεστής $n_\varepsilon(\Delta)$ είναι φραγμένος από τον H^1 στον L^1. Αν Φ_R είναι η συνάρτηση του Λήμματος 2.6.2, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_M m_\varepsilon(\Delta)a(x)dx &= \int_M \lim_{R\to\infty}\Phi_R(x)m_\varepsilon(\Delta)a(x)dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_M \Phi_R(x)\Delta n_\varepsilon(\Delta)a(x)dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_M \Delta\Phi_R(x)n_\varepsilon(\Delta)a(x)dx.\end{aligned}$$

Αλλά, από το Λήμμα 2.6.2, υπάρχει $c > 0$, τέτοιο ώστε $|\Delta\Phi_R(x)| \leq c$, για κάθε $R > 0$ και $x \in M$. Επομένως καθώς ο $n_\varepsilon(\Delta)$ είναι φραγμένος από τον H^1 στον L^1, θα έχουμε

$$\int_M |\Delta\Phi_R(x) n_\varepsilon(\Delta) a(x)| dx \leq c \int_M |n_\varepsilon(\Delta) a(x)| dx \leq c||a||_1.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι $\lim_{R\to\infty} \Phi_R(x) = 1$. Επομένως

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} \int_M \Delta\Phi_R(x) n_\varepsilon(\Delta) a(x) dx &= \int_M \lim_{R\to\infty} \Delta\Phi_R(x) n_\varepsilon(\Delta) a(x) dx \\ &= \int_M \Delta \left(\lim_{R\to\infty} \Phi_R(x) \right) n_\varepsilon(\Delta) a(x) dx = 0\end{aligned}$$

και η απόδειξη έφτασε στο τέλος της.

□

2.7 Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.3

Θα αποδείξουμε τη συνέχεια του $m(\Delta)$ στον H^p για $p \in (p_0, 1)$. Η περίπτωση όπου $p = 1$ είναι όμοια.

Έστω a ένα p-άτομο με φορέα στην μπάλλα $B(y, r)$, $y \in M$, $r > 0$, και έστω ψ συνάρτηση με συμπαγή φορέα στη M. Από τη δυικότητα των χώρων H^p και $\mathcal{L}_\alpha$, όπου $\alpha = (1/p) - 1$, για να δείξουμε ότι ο $m(\Delta)$ είναι φραγμένος στον H^p, αρκεί να δείξουμε ότι

$$|\langle m(\Delta)a, \psi\rangle| \leq c||a||_{H^p}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} = c||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha},$$

καθώς $||a||_{H^p} = 1$.

Από την Πρόταση 2.6.1, έχουμε ότι $\int_M (m(\Delta)a)(x) dx = 0$, άρα

$$\langle m(\Delta)a, \psi\rangle = \langle m(\Delta)a, \psi - \psi(y)\rangle. \tag{2.7.1}$$

Θεωρούμε $N \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$2^{N/2} \leq r < 2^{(N+1)/2}. \tag{2.7.2}$$

Γράφουμε

$$\psi - \psi(y) = (\psi - \psi(y))1_{B(y,4r)} + (\psi - \psi(y))1_{B(y,4r)^c} := \psi_1 + \psi_2$$

και έχουμε τότε

$$\langle m(\Delta)a, \psi\rangle = \langle m(\Delta)a, \psi_1\rangle + \langle m(\Delta)a, \psi_2\rangle. \tag{2.7.3}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}|\langle m(\Delta)a, \psi_1\rangle| &\leq ||m(\Delta)a||_2||\psi_1||_2 \\ &\leq ||m(\Delta)||_{2\to 2}||a||_2||\psi - \psi(y)||_{L^2(B(y,4r))}.\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (2.3.10), (2.3.21) και (2.1.1) έχουμε

$$\begin{aligned}|\langle m(\Delta)a, \psi_1\rangle| &\leq ||m||_\infty V(y,r)^{(1/2)-(1/p)}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} V(y,4r)^{(1/p)-(1/2)} \\ &\leq c||m||_\infty \left(\frac{4r}{r}\right)^{D(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} ||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} \\ &= c||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}.\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Απομένει να εκτιμήσουμε τον όρο

$$\langle m(\Delta)a, \psi_2\rangle.$$

Από τη (2.5.2) έχουμε ότι $m = \sum_{j\in\mathbb{Z}} m_j$, όπου οι m_j έχουν οριστεί στη (2.5.1). Γράφουμε,

$$\begin{aligned}|\langle m(\Delta)a, \psi_2\rangle| &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\langle m_j(\Delta)a, \psi_2\rangle| \\ &= \sum_{j<N+4} |\langle m_j(\Delta)a, \psi_2\rangle| + \sum_{j\geq N+4} |\langle m_j(\Delta)a, \psi_2\rangle|,\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

όπου $N \in \mathbb{Z}$ και ορίστηκε στη (2.7.2).

Εκτίμηση των $\langle m_j(\Delta)a, \psi_2\rangle$ *όταν* $j < N + 4$.

Θα πρέπει να εκτιμήσουμε το άθροισμα

$$\sum_{j<N+4} |\langle m_j(\Delta)a, \psi_2\rangle|,$$

όπου η ψ_2 έχει φορέα στη $B(y, 4r)^c$.

Παρατηρούμε ότι αν $x \in B(y, 4r)^c$, τότε

$$d(x, y) \geq 4r > 2^{(N+4)/2}.$$

Επομένως η $B(y, 4r)^c$ περιέχεται στο σύνολο

$$\bigcup_{q \geq N+4} A_q(y).$$

Επομένως για $j < N + 4$, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} |\langle m_j(\Delta)a, \psi_2\rangle| &\leq \sum_{q=N+4}^{\infty} ||m_j(\Delta)a\psi_2||_{L^1(A_q(y))} \\ &\leq \sum_{q=N+4}^{\infty} ||m_j(\Delta)a||_{L^2(A_q(y))}||\psi_2||_{L^2(A_q(y))}. \end{aligned} \tag{2.7.6}$$

Από την ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα έχουμε

$$\begin{aligned} ||m_j(\Delta)a||_{L^2(A_q(y))} &= \Big(\int_{A_q(y)} \Big|\int_M K_j(x, z)a(z)dz\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_{B(y,r)} \Big(\int_{A_q(y)} |K_j(x, z)a(z)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} dz \\ &= \int_{B(y,r)} |a(z)|||K_j(., z)||_{L^2(A_q(y))}dz \\ &\leq \sup_{d(z,y)\leq r} ||K_j(., z)||_{L^2(A_q(y))}||a||_1. \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Παρατηρούμε ότι αν $x \in A_q(y)$ και $z \in B(y, r)$, τότε καθώς $q \geq N + 4$,

$$d(x, z) \geq d(x, y) - d(y, z) > 2^{q/2} - r \geq 2^{q/2} - 2^{N/2} \geq 2^{q/2} - 2^{(q-4)/2} = 2^{(q-4)/2}.$$

Συνεπώς το $A_q(y)$ περιέχεται στο

$$B(z, 2^{(q-4)/2})^c.$$

Από την (2.1.1) έχουμε

$$\sqrt{\frac{V(z, 2^{(q+4)/2})}{V(z, 2^{j/2})}} \leq 2^{(q-j)D/4},$$

επομένως η (2.4.3) δίνει

$$\begin{aligned}||K_j(.,z)||_{L^2(A_q(y))} &\leq ||K_j(.,z)||_{L^2(B(z,2^{(q-4)/2})^c)}\\ &\leq c||m_j||_{\mathcal{C}^A}2^{-A(q-j)/2}V(z,2^{j/2})^{-1/2} \qquad (2.7.8)\\ &\leq c2^{-A(q-j)/2}2^{(q-j)D/4}V(z,2^{(q+4)/2})^{-1/2}.\end{aligned}$$

Επίσης αν $d(y,z) \leq r < 2^{(N+1)/2}$, τότε για $q \geq N+4$, έχουμε ότι

$$B(y,2^{q/2}) \subseteq B(z,2^{(q+4)/2}).$$

Τότε από την (2.7.8) έχουμε

$$||K_j(.,z)||_{L^2(A_q(y))} \leq c2^{-A(q-j)/2}2^{(q-j)D/4}V(y,2^{q/2})^{-1/2},$$

που σε συνδυασμό με τη (2.3.10) και τη (2.3.21) δίνει ότι

$$\begin{aligned}&||m_j(\Delta)a\psi_2||_{L^1(A_q(y))}\\ &\leq ||m_j(\Delta)a||_{L^2(A_q(y))}||\psi_2||_{L^2(A_q(y))}\\ &\leq \sup_{d(z,y)\leq r}||K_j(.,z)||_{L^2(A_q(y))}||a||_1||\psi_2||_{L^2(A_q(y))}\\ &\leq c2^{-A(q-j)/2}2^{(q-j)D/4}V(y,2^{q/2})^{-1/2}V(y,r)^{-\frac{1}{p}+1}V(y,2^{(q+1)/2})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} \qquad (2.7.9)\\ &= c2^{-A(q-j)/2}2^{(q-j)D/4}\Big(\frac{V(y,2^{(q+1)/2})}{V(y,2^{q/2})}\Big)^{1/2}\Big(\frac{V(y,2^{(q+1)/2})}{V(y,r)}\Big)^{\frac{1}{p}-1}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}\\ &\leq c2^{-A(q-j)/2}2^{(q-j)D/4}\Big(\frac{2^{(q+1)/2}}{r}\Big)^{D(\frac{1}{p}-1)}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}.\end{aligned}$$

Επιπλέον καθώς $2^{N/2} \leq r < 2^{(N+1)/2}$, έχουμε

$$\begin{aligned}||m_j(\Delta)a\psi_2||_{L^1(A_q(y))} &\leq c2^{-A(q-j)/2}2^{(q-j)D/4}2^{(q-N)D(\frac{1}{p}-1)/2}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}\\ &= c2^{-(A-D(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}))q/2}2^{(A-(D/2))j/2}2^{ND(1-(1/p))/2}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}.\end{aligned}$$

Αθροίζουμε για $q \geq N+4$ και έχοντας υπόψη μας ότι $A > D\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$, έπεται ότι

$$\begin{aligned}|\langle m_j(\Delta)a,\psi_2\rangle| &\leq \sum_{q=N+4}^{\infty}||m_j(\Delta)a\psi_2||_{L^1(A_q(y))}\\ &\leq \sum_{q=N+4}^{\infty}c2^{-(A-D(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}))q/2}2^{(A-(D/2))j/2}2^{ND(1-(1/p))/2}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}\\ &\leq c2^{-(A-D(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}))(N+4)/2}2^{(A-(D/2))j/2}2^{ND(1-(1/p))/2}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}\\ &\leq c2^{-(A-(D/2))N/2}2^{-2(A-D(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}))}2^{(A-(D/2))j/2}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}\\ &= c2^{-(A-(D/2))N/2}2^{(A-(D/2))j/2}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}. \qquad (2.7.10)\end{aligned}$$

Είναι $p < 1$, επομένως έχουμε ότι $A > D(1/p - 1/2) > D/2$. Αν λοιπόν στη (2.7.10) αθροίσουμε για $j < N+4$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{N+4} |\langle m_j(\Delta)a, \psi_2\rangle| &\leq \sum_{j=-\infty}^{N+4} c2^{-(A-(D/2))N/2}2^{(A-(D/2))j/2}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} \\ &\leq c2^{-(A-(D/2))N/2}2^{(A-(D/2))N/2}||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} \leq c||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}. \quad (2.7.11)\end{aligned}$$

Εκτίμηση των $\langle m_j(\Delta)a, \psi_2\rangle$ *όταν* $j \geq N+4$.

Θέτουμε

$$X := \{x \in M; 2^{(N+4)/2} \leq d(x,y) \leq 2^{j/2}\}.$$

Έχουμε

$$x \in B(y,4r)^c \Rightarrow d(x,y) \geq 4r > 42^{N/2} = 2^{(N+4)/2},$$

άρα θα είναι

$$\begin{aligned}B(y,4r)^c &\subseteq \{x \in M; d(x,y) \geq 2^{(N+4)/2}\} \\ &= X \cup \bigcup_{q=j}^{\infty} A_q(y). \quad (2.7.12)\end{aligned}$$

Από τη (2.7.12) έχουμε,

$$\begin{aligned}|\langle m_j(L)a, \psi_2\rangle| &= ||m_j(L)a\psi_2||_{L^1(B(y,4r)^c)} \\ &\leq ||m_j(L)a\psi_2||_{L^1(X)} + \sum_{q=j}^{\infty} ||m_j(L)a\psi_2||_{L^1(A_q(y))}. \quad (2.7.13)\end{aligned}$$

Ακόμα έχουμε

$$\begin{aligned}(m_j(L)a)(x) &= \int_M K_j(x,z)a(z)dz \\ &= \int_M K_j(x,z)a(z)dz - K_j(x,y)\int_M a(z)dz \\ &= \int_{B(y,r)} (K_j(x,z) - K_j(x,y))a(z)dz. \quad (2.7.14)\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα παίρνουμε

$$\begin{aligned}
||m_j(L)a||_{L^2(X)} &= \Big(\int_X |(m_j(L)a)(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\int_X \Big| \int_{B(y,r)} (K_j(x,z) - K_j(x,y))a(z)dz\Big|^2 dx\Big)^{1/2} \\
&\leq \int_{B(y,r)} \Big(\int_X |K_j(x,z) - K_j(x,y)|^2 |a(z)|^2 dx\Big)^{1/2} dz \\
&= \int_{B(y,r)} |a(z)| \Big(\int_X |K_j(x,z) - K_j(x,y)|^2 dx\Big)^{1/2} dz \\
&= \int_{B(y,r)} |a(z)| ||K_j(.,z) - K_j(.,y)||_{L^2(X)} dz \\
&\leq \int_{B(y,r)} |a(z)| dz \sup_{z\in B(y,r)} ||K_j(.,z) - K_j(.,y)||_{L^2(X)} \\
&= \sup_{z\in B(y,r)} ||K_j(.,z) - K_j(.,y)||_{L^2(X)} ||a||_1 \qquad (2.7.15)
\end{aligned}$$

Για το άτομο έχουμε

$$||a||_1 \leq V(y,r)^{1-1/p}.$$

Από την (2.4.10), έχουμε

$$\sup_{z\in B(y,r)} ||K_j(.,z) - K_j(.,y)||_{L^2(X)} \leq \frac{||m_j||_{\mathcal{C}^A}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}} \Big(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\Big)^{\gamma}$$

και από τη (2.3.21) έπεται

$$||\psi_2||_{L^2(X)} \leq ||\psi - \psi(y)||_{L^2(B(y,2^{j/2}))} \leq ||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} V(y,2^{j/2})^{1/p-1/2}$$

Και έτσι από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, τη (2.7.15) και τη (2.1.2) συνεπάγεται ότι,

$$\begin{aligned}
||m_j(L)a\psi_2||_{L^1(X)} &\leq ||m_j(L)a||_{L^2(X)} ||\psi_2||_{L^2(X)} \\
&\leq \Big(\sup_{d(z,y)\leq r} ||K_j(.,z) - K_j(.,y)||\Big) ||a||_1 ||\psi - \psi(y)||_{L^2(B(y,2^{j/2}))} \\
&\leq cV(y,r)^{1-1/p} \frac{||m_j||_{\mathcal{C}^A}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}} \Big(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\Big)^{\gamma} ||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} V(y,2^{j/2})^{1/p-1/2} \\
&\leq c\Big(\frac{2^{N/2}}{2^{j/2}}\Big)^{\gamma} \Big(\frac{V(y,2^{j/2})}{V(y,2^{N/2})}\Big)^{(1/p)-1} ||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} \\
&\leq c2^{(N-j)\gamma/2} 2^{(j-N)(\frac{1}{p}-1)D/2} ||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} \\
&\leq c||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} 2^{\frac{D+\gamma}{2p}(p-\frac{D}{D+\gamma})N} \cdot 2^{-\frac{D+\gamma}{2p}\cdot(p-\frac{D}{D+\gamma})j}, \qquad (2.7.16)
\end{aligned}$$

καθώς

$$d(y,z) \leq r \leq 2^{(N+1)/2}.$$

Για το δεύτερο μέρος της σχέσης (2.7.13) έχουμε για $q \geq j$, από την ανισότητα Minkovski για ολοκληρώματα και πάλι

$$\begin{aligned}
||m_j(L)a||_{L^2(A_q(y))} &= \Big(\int_{A_q(y)} |(m_j(L)a)(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\int_{A_q(y)} \Big|\int_{B(y,r)} (K_j(x,z) - K_j(x,y))a(z)dz\Big|^2 dx\Big)^{1/2} \\
&\leq \int_{B(y,r)} \Big(\int_{A_q(y)} |K_j(x,z) - K_j(x,y)|^2 |a(z)|^2 dx\Big)^{1/2} dz \\
&= \int_{B(y,r)} |a(z)| \Big(\int_{A_q(y)} |K_j(x,z) - K_j(x,y)|^2 dx\Big)^{1/2} dz \\
&= \int_{B(y,r)} |a(z)| ||K_j(.,z) - K_j(.,y)||_{L^2(A_q(y))} dz \\
&\leq \int_{B(y,r)} |a(z)| dz \sup_{z\in B(y,r)} ||K_j(.,z) - K_j(.,y)||_{L^2(A_q(y))} \\
&= \sup_{z\in B(y,r)} ||K_j(.,z) - K_j(.,y)||_{L^2(A_q(y))} ||a||_1
\end{aligned}$$

Τώρα από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, τις σχέσεις (2.7.14), (2.4.11), (2.3.21), (2.1.2) και τη $2^{N/2} < r \leq 2^{(N+1)/2}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
& ||m_j(L)a\psi_2||_{L^1(A_q(y))} \\
\leq\ & ||m_j(L)a||_{L^2(A_q(y))} ||\psi_2||_{L^2(A_q(y))} \\
\leq\ & \sup_{z\in B(y,r)} ||K_j(.,z) - K_j(.,y)||_{L^2(A_q(y))} ||a||_1 ||\psi - \psi(y)||_{L^2(B(y,2^{(q+1)/2}))} \\
\leq\ & cV(y,r)^{1-1/p} \cdot \frac{2^{-A(q-j)/2}||m_j||_{\mathcal{C}^A}}{\sqrt{V(y,2^{j/2})}} \Big(\frac{d(y,z)}{2^{j/2}}\Big)^{\gamma} ||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} V(y,2^{(q+1)/2})^{1/p-1/2} \\
\leq\ & c2^{-A(q-j)/2} \Big(\frac{2^{(N+1)/2}}{2^{j/2}}\Big)^{\gamma} \Big(\frac{V(y,2^{(q+1)/2})}{V(y,r)}\Big)^{(1/p)-1} \Big(\frac{V(y,2^{(q+1)/2})}{V(y,2^{j/2})}\Big)^{1/2} ||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} \\
\leq\ & c2^{-A(q-j)/2} 2^{(N-j)\gamma/2} 2^{(q-j)D/4} 2^{(q-N)((1/p)-1)D/2} ||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} \\
=\ & c||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} 2^{-(A-D(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}))q/2} 2^{(A-(D/2)-\gamma)j/2} 2^{(D+\gamma-(D/p))N/2}.
\end{aligned} \tag{2.7.17}$$

Επομένως αφού $A > D\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=j}^{\infty} ||m_j(L)a\psi_2||_{L^1(A_q(y))} \\
\leq\ & c||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} 2^{(D+\gamma-(D/p))N/2} 2^{(A-(D/2)-\gamma)j/2} \sum_{q=j}^{\infty} 2^{-(A-D(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}))q/2} \\
\leq\ & c||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} 2^{\frac{D+\gamma}{2p}(p-\frac{D}{D+\gamma})N} 2^{-\frac{D+\gamma}{2p}(p-\frac{D}{D+\gamma})j}.
\end{aligned} \tag{2.7.18}$$

Για την περίπτωση $N+4 \leq j$, έχουμε από τις σχέσεις (2.7.13), (2.7.16), (2.7.18) ότι

$$\begin{aligned}
& |\langle m_j(L)a, \psi_2\rangle| \\
\leq\ & ||m_j(L)a\psi_2||_{L^1(X)} + \sum_{q=j}^{\infty} ||m_j(L)a\psi_2||_{L^1(A_q(y))} \\
\leq\ & c||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} 2^{\frac{D+\gamma}{2p}\cdot(p-\frac{D}{D+\gamma})N} 2^{-\frac{D+\gamma}{2p}(p-\frac{D}{D+\gamma})j}.
\end{aligned}$$

Αν

$$W = \frac{D+\gamma}{2p}\Big(p - \frac{D}{D+\gamma}\Big) > 0,$$

και καθώς

$$p > p_0 = \frac{D}{D+\gamma},$$

θα καταλήξουμε μέσω της (2.7.19) στην

$$\begin{aligned}
\sum_{j=N+4}^{\infty} |\langle m_j(L)a, \psi_2\rangle| &\leq \sum_{j=N+4}^{\infty} c||\psi||_{\mathcal{L}_a} 2^{WN} 2^{-Wj} \\
&= c||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha} 2^{WN} \sum_{j=N+4}^{\infty} 2^{-Wj} \\
&\leq c||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.7.19}$$

Η απόδειξη τελειώνει από τις σχέσεις (2.7.5), (2.7.11) και (2.7.19) καθώς

$$\begin{aligned}
|\langle m(\Delta)a, \psi\rangle| &\leq |\langle m(\Delta)a, \psi_1\rangle| + |\langle m(\Delta)a, \psi_2\rangle| \\
&\leq |\langle m(\Delta)a, \psi_1\rangle| + \sum_{j<N+4} |\langle m_j(\Delta)a, \psi_2\rangle| + \sum_{j\geq N+4} |\langle m_j(\Delta)a, \psi_2\rangle| \\
&\leq c||\psi||_{\mathcal{L}_\alpha}
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3

Μέσοι όροι Riesz σε Γραφήματα και Διακριτές ομάδες

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την L^p-συνέχεια των μέσων όρων Riesz σε γραφήματα και διακριτές ομάδες. Αρχικά θα δώσουμε κάποια στοιχεία για τα δύο είδη χώρων που μας ενδιαφέρουν. Βασιζόμαστε στο άρθρο [38] του Μ. Μαριά για τα γραφήματα και το άρθρο [2] του Γ. Αλεξόπουλου για τις διακριτές ομάδες.

3.2 Γραφήματα

Ας είναι Γ ένα αριθμήσιμο σύνολο εφοδιασμένο με μια συνάρτηση

$$\sigma : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow [0, \infty)$$

ώστε για κάθε $x, y \in \Gamma$, να ισχύουν

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$,

2. $\sigma(x, x) > 0$,

3. $\sum_{y \in \Gamma} \sigma(x, y) < \infty$, για κάθε $x \in \Gamma$.

Ορισμός 3.2.1. Η συνάρτηση σ καλείται συνάρτηση βάρους και το Γ εφοδιασμένο με αυτήν καλείται γράφημα.

Ορισμός 3.2.2. Δύο στοιχεία $x, y \in \Gamma$ καλούνται γειτονικά και γράφουμε $x \sim y$ όταν $\sigma(x,y) > 0$.

Ορισμός 3.2.3. Διαδρομή μήκους n που ενώνει τα στοιχεία $x, y \in \Gamma$ καλείται μια ακολουθία στοιχείων

$$x = x_1, x_2, ..., x_n = y, \text{ έτσι ώστε } x_i \sim x_{i+1}\ ,\ i = 1, 2, ..., n-1.$$

Ορισμός 3.2.4. Συνεκτικό καλείται ένα γράφημα Γ, όταν για οποιοδήποτε ζευγάρι στοιχείων του, υπάρχει μια διαδρομή που τα ενώνει.

Παρατήρηση 3.2.5. Για κάθε $x, y \in \Gamma$ ισχύουν
(i) $x \sim x$ και (ii) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$.

Παρατήρηση 3.2.6. Αν η διαδρομή $x = x_1, x_2, ..., x_n = y$, ενώνει τα στοιχεία $x, y \in \Gamma$, τότε η διαδρομή $y = x_n, x_{n-1}, ..., x_1 = x$, ενώνει τα στοιχεία $y, x \in \Gamma$.

Ορισμός 3.2.7. Η απόσταση $d(x,y)$ των στοιχείων $x, y \in \Gamma$, ορίζεται ως το ελάχιστο των μηκών όλων των διαδρομών που ενώνουν τα στοιχεία $x, y \in \Gamma$, στο συνεκτικό γράφημα Γ.

Θα συμβολίζουμε στο εξής με

$$B(x,r) = \{y \in \Gamma; d(x,y) \leq r\}$$

τη μπάλλα με κέντρο $x \in \Gamma$ και ακτίνα $r > 0$.

Ορισμός 3.2.8. Έστω ένα μέτρο στο Γ που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\mu_x = \sum_{y \sim x} \sigma(x,y) = \sum_{y \in \Gamma} \sigma(x,y), \text{ για κάθε } x \in \Gamma.$$

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu_x, \text{ για κάθε } A \subseteq \Gamma.$$

Έχουμε έτσι το χώρο μέτρου $(\Gamma, \mathcal{P}(\Gamma), \mu)$, όπου $\mathcal{P}(\Gamma)$ το δυναμοσύνολο του Γ.

Θα συμβολίζονται στη συνέχεια με

1. $|A| = \mu(A)$, ο όγκος του $A \subseteq \Gamma$.

2. $L^p = L^p(\Gamma, \mathcal{P}(\Gamma), \mu)$, $p \in [1, \infty]$.

3. $\langle , \rangle = \langle , \rangle_{L^2}$, το εσωτερικό γινόμενο του L^2.

Ορισμός 3.2.9. Πυρήνα μετάβασης θα καλούμε τη συνάρτηση,

$$p(x,y) = \frac{\sigma(x,y)}{\mu_x \mu_y}\ ,\ x, y \in \Gamma.$$

Στην ακόλουθη πρόταση δίνουμε τις ιδιότητες του πυρήνα $p(x,y)$.

Πρόταση 3.2.10. *(i). Ο πυρήνας $p(x,y)$ είναι πυρήνας Markov.*

(ii). Ο $p(x,y)$ είναι συμμετρικός.

Απόδειξη. (i) α. Είναι για κάθε $x, y \in \Gamma$

$$\sigma(x,y) \geq 0 \Rightarrow p(x,y) \geq 0.$$

(i) β. Για κάθε $x \in \Gamma$, έχουμε από τον ορισμό του πυρήνα και του μέτρου,

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \Gamma} p(x,y)\mu_y &= \sum_{y \in \Gamma} \frac{\sigma(x,y)}{\mu_x} \\ &= \frac{1}{\mu_x} \sum_{y \in \Gamma} \sigma(x,y) \\ &= \frac{1}{\mu_x}\mu_x \\ &= 1. \end{aligned}$$

(ii). Για κάθε $x, y \in \Gamma$, έχουμε από τον ορισμό του πυρήνα και του βάρους,

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{\sigma(x,y)}{\mu_x \mu_y} \\ &= \frac{\sigma(y,x)}{\mu_y \mu_x} \\ &= p(y,x). \end{aligned}$$

□

Στο εξής θα υποθέσουμε ότι στο γράφημά μας ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

A. Υπάρχει $c > 0$, ώστε για κάθε $x \in \Gamma,\ r > 0$,

$$|B\,(x, 2r)\,| \leq C|B\,(x, r)\,|. \tag{3.2.1}$$

Παρατήρηση 3.2.11. Η ιδιότητα αυτή καλείται ιδιότητα διπλασιασμού του όγκου όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2 και από αυτήν αποδείξαμε ότι υπάρχει $D > 0$ τέτοιο ώστε

$$|B\,(x, r)\,| \leq C\left(\frac{r}{s}\right)^D |B\,(x, s)\,|,\ \text{για κάθε } r \geq s > 0. \tag{3.2.2}$$

Ορισμός 3.2.12. Η D καλείται ομογενής διάσταση του Γ.

B. Υπάρχει σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε για κάθε $x_0 \in \Gamma,\ r > 0$,

$$\sum_{x \in B(x_0, r)} |f(x) - f_{B(x_0,r)}|^2 \mu_x \leq Cr^2 \sum_{x,y \in B(x_0, 2r)} |f(y) - f(x)|^2 \sigma(x, y) \tag{3.2.3}$$

όπου συμβολίσαμε με $f_{B(x_0,r)}$ τη μέση τιμή της f πάνω στην μπάλλα $B(x_0, r)$, δηλαδή

$$f_{B(x_0,r)} = |B(x_0, r)|^{-1} \sum_{x \in B(x_0,r)} f(x)\mu_x.$$

Ορισμός 3.2.13. Η (3.2.3) καλείται ανισότητα Poincaré.

Ορισμός 3.2.14. Θέτουμε τον πυρήνα $p_0(x, y) = \delta_x(y)$, δηλαδή τη συνάρτηση Dirac. Επίσης ορίζουμε τους πυρήνες

$$p_n(x, y) = \sum_{z \in \Gamma} p(x, z)p_{n-1}(z, y)\mu_z\ ,\ x, y \in \Gamma,\ n \geq 1.$$

Παρατήρηση 3.2.15. Οι πυρήνες $p_n(x, y)$ είναι συμμετρικοί και Markov. Θα αποτελέσουν το διακριτό ανάλογο του πυρήνα της θερμότητας μιάς και ικανοποιούν ανάλογες εκτιμήσεις.

Από τις ιδιότητες (3.2.1) και (3.2.3) έχει αποδειχθεί (βλ. [18, 21]) ότι υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in \Gamma$, να ισχύει

$$p_n(x, y) \leq \frac{c}{|B(x, \sqrt{n})|} e^{-cd(x,y)^2/n},\ \text{για κάθε } x, y \in \Gamma,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.4}$$

Ορισμός 3.2.16. Ορίζουμε τον τελεστή,

$$Pf(x) = \sum_{y \in \Gamma} p(x,y) f(y) \mu_y \ , \ x \in \Gamma,$$

για τις συναρτήσεις $f \in L^1(\Gamma)$.

Ορίζουμε τον τελεστή

$$L = I - P \ , \ Lf(x) = f(x) - \sum_{y \in \Gamma} p(x,y) f(y) \mu_y, \ x \in \Gamma,$$

για τις συναρτήσεις $f \in L^1(\Gamma)$.

Στην ακόλουθη πρόταση δίνουμε τις ιδιότητες των τελεστών P και L.

Πρόταση 3.2.17. *(i) Ο τελεστής P είναι φραγμένος στον L^2 με*

$$||P||_{2 \to 2} \leq 1.$$

(ii) Ο τελεστής L είναι φραγμένος στον L^2 με

$$||L||_{2 \to 2} \leq 2.$$

(iii) Ο τελεστής P είναι αυτοσυζυγής στον L^2.
(iv) Ο τελεστής L είναι αυτοσυζυγής στον L^2.
(v) Για κάθε συνάρτηση $f \in L^2$, ισχύει

$$\langle Lf, f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Gamma} (f(x) - f(y))^2 \sigma(x,y).$$

Απόδειξη. (i) Για $f \in L^1$ θα έχουμε από τη μαρκοβιανή ιδιότητα του $p(x,y)$,

$$\begin{aligned}
||Pf||_1 &= \Big|\Big|\sum_{y\in\Gamma} p(.,y)f(y)\Big|\Big|_1 \\
&= \sum_{x\in\Gamma}\Big|\sum_{y\in\Gamma} p(x,y)f(y)\mu_y\Big|\mu_x \\
&\leq \sum_{x\in\Gamma}\sum_{y\in\Gamma} p(x,y)|f(y)|\mu_y\mu_x \\
&= \sum_{y\in\Gamma}\Big(\sum_{x\in\Gamma} p(x,y)\mu_x\Big)|f(y)|\mu_y \\
&= \sum_{y\in\Gamma}|f(y)|\mu_y \\
&= ||f||_1.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$||P||_{1\to 1} \leq 1.$$

Επίσης έχουμε για $f \in L^\infty, x \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}
|Pf(x)| &= \Big|\sum_{y\in\Gamma} p(x,y)f(y)\mu_y\Big| \\
&\leq \sum_{y\in\Gamma} p(x,y)|f(y)|\mu_y \\
&\leq ||f||_\infty \sum_{y\in\Gamma} p(x,y)\mu_y \\
&= ||f||_\infty.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$||P||_{\infty\to\infty} \leq 1.$$

Από την παρεμβολή μεταξύ των δεικτών $1, 2, \infty$ παίρνουμε ότι ο P είναι φραγμένος στον L^2 με

$$||P||_{2\to 2} \leq 1.$$

(ii) Για $f \in L^2$ από το (i) θα έχουμε,

$$\begin{aligned}
||Lf||_2 &= ||f - Pf||_2 \\
&\leq ||f||_2 + ||Pf||_2 \\
&\leq 2||f||_2,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$||L||_{2\to 2} \leq 2.$$

(iii) Για συναρτήσεις $f, g \in L^2$ έχουμε από την Πρόταση 3.2.10,

$$\begin{aligned}
\langle Pf, g\rangle &= \sum_{x\in\Gamma} Pf(x)g(x)\mu_x \\
&= \sum_{x\in\Gamma}\sum_{y\in\Gamma} p(x,y)f(y)\mu_y g(x)\mu_x \\
&= \sum_{y\in\Gamma} f(y)\Big(\sum_{x\in\Gamma} g(x)p(x,y)\mu_x\Big)\mu_y \\
&= \sum_{y\in\Gamma} f(y)Pg(y)\mu_y \\
&= \langle f, Pg\rangle,
\end{aligned}$$

δηλαδή ο P είναι αυτοσυζυγής στον L^2.

(iv) Για συναρτήσεις $f, g \in L^2$ έχουμε από το (iii) ,

$$\begin{aligned}
\langle Lf, g\rangle &= \langle f, g\rangle - \langle Pf, g\rangle \\
&= \langle f, g\rangle - \langle f, Pg\rangle \\
&= \langle f, Lg\rangle.
\end{aligned}$$

δηλαδή ο L είναι αυτοσυζυγής στον L^2.

(v) Παρατηρήσουμε ότι για κάθε $f \in L^2$,

$$\begin{aligned}
\langle Pf, f\rangle &= \sum_{x\in\Gamma} Pf(x)f(x)\mu_x \\
&= \sum_{x\in\Gamma}\sum_{y\in\Gamma} p(x,y)f(y)\mu_y f(x)\mu_x \\
&= \sum_{x,y\in\Gamma} f(y)f(x)\sigma(x,y). \qquad (3.2.5)
\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\langle f, f\rangle = \sum_{z\in\Gamma} f(z)f(z)\mu_z$$

από όπου έχουμε

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{2}\Big(\sum_{x\in\Gamma} f(x)^2\mu_x + \sum_{y\in\Gamma} f(y)^2\mu_y\Big). \tag{3.2.6}$$

Συνολικά λοιπόν θα έχουμε από τη μαρκοβιανή ιδιότητα του $p(x, y)$, τις σχέσεις (3.2.5), (3.2.6) και τη συμμετρία της συνάρτησης του βάρους,

$$\begin{aligned}
&\langle Lf, f\rangle = \langle f, f\rangle - \langle Pf, f\rangle \\
= \;& \frac{1}{2}\Big(\sum_{x\in\Gamma} f(x)^2\mu_x + \sum_{y\in\Gamma} f(y)^2\mu_y\Big) - \sum_{x,y\in\Gamma} f(y)f(x)\sigma(x,y) \\
= \;& \frac{1}{2}\Big(\sum_{x\in\Gamma} f(x)^2\mu_x \cdot 1 + \sum_{y\in\Gamma} f(y)^2\mu_y \cdot 1 - \sum_{x,y\in\Gamma} 2f(y)f(x)\sigma(x,y)\Big) \\
= \;& \frac{1}{2}\Big(\sum_{x\in\Gamma} f(x)^2\mu_x \cdot \sum_{y\in\Gamma} p(x,y)\mu_y + \sum_{y\in\Gamma} f(y)^2\mu_y \cdot \sum_{x\in\Gamma} p(y,x)\mu_x - \sum_{x,y\in\Gamma} 2f(y)f(x)\sigma(x,y)\Big) \\
= \;& \frac{1}{2}\Big(\sum_{x,y\in\Gamma} f(x)^2(\mu_x \cdot p(x,y)\mu_y) + \sum_{x,y\in\Gamma} f(y)^2(\mu_y \cdot p(y,x)\mu_x) - \sum_{x,y\in\Gamma} 2f(y)f(x)\sigma(x,y)\Big) \\
= \;& \frac{1}{2}\Big(\sum_{x,y\in\Gamma} f(x)^2\sigma(x,y) + \sum_{x,y\in\Gamma} f(y)^2\sigma(y,x) - \sum_{x,y\in\Gamma} 2f(y)f(x)\sigma(x,y)\Big) \\
= \;& \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\Gamma} \Big(f(x)^2 + f(y)^2 - 2f(y)f(x)\Big)\sigma(x,y) \\
= \;& \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\Gamma} (f(x) - f(y))^2\sigma(x,y).
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 3.2.18. Από το (v) της Πρότασης 3.2.17 προκύπτει ότι ο L είναι θετικός.

3.3 Διακριτές Ομάδες

Θεωρούμε μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G. Θα συμβολίζουμε με U ένα πεπερασμένο σύνολο ώστε να ισχύουν τα εξής:

- Το ουδέτερο στοιχείο, e, της G ανήκει στο U.

- Το U είναι συμμετρικό, δηλαδή $x^{-1} \in U,$ όταν $x \in U.$
- Το U παράγει τη G, δηλαδή $G = \langle U \rangle$.

Ορισμός 3.3.1. Ορίζουμε τα σύνολα

$$U^n = \{x = x_1 \cdots x_n;\ x_i \in U,\ i = 1, 2, ..., n\},\ n \in \mathbb{N}^*$$

και για $n = 0$ θέτουμε,

$$U^0 = \{e\}.$$

Για $t \geq 0$, θέτουμε

$$U^t = U^{[t]}.$$

Παρατήρηση 3.3.2. Για κάθε $0 \leq t_1 \leq t_2$, είναι $U^{t_1} \subseteq U^{t_2}$.

Θα υποθέσουμε ότι η G έχει πολυωνυμική αύξηση όγκου δηλαδή υπάρχει θετική σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε

$$|U^n| \leq cn^c,\ n \in \mathbb{N}^*, \tag{3.3.1}$$

όπου με $|\ |$ συμβολίσαμε τον πληθάριθμο. Από [6, 29] έχουμε ότι υπάρχει $D \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{c}n^D \leq |U^n| \leq cn^D,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.3.2}$$

Ορισμός 3.3.3. Ο θετικός ακέραιος D καλείται ομογενής διάσταση της ομάδας G και είναι ανεξάρτητος από το παράγον σύνολο U (βλ. [2]).

Θεωρούμε ένα μέτρο μ επί της ομάδας G, για το οποίο ισχύουν,

- $\mu(x) = \mu(x^{-1}),\ x \in G.$
- $\mu(G) = 1,$
- $|supp(\mu)| < \infty,$
- $\langle supp(\mu) \rangle = G,$

Παρατήρηση 3.3.4. Θα υποθέτουμε στο εξής ότι,

$$supp(\mu) \subseteq U.$$

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε

$$L^p = L^p(G, \mathcal{P}(G), \mu), \ \ p \in [1, \infty],$$

και με $\langle , \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο του L^2.

Ορισμός 3.3.5. Θέτουμε για κάθε $x, y \in G$,

$$|x|_G = \min\{n \in \mathbb{N};\ x \in U^n\}.$$

και

$$d(x, y) = |xy^{-1}|_G.$$

Πρόταση 3.3.6. *(i) Η $d(x, y)$ αποτελεί μετρική στην G.*

(ii) Για κάθε $x \in G,\ r > 0$, για τις μπάλλες $B(x, r) = \{y \in G/d(x, y) \leq r\}$ ισχύει

$$B(x, r) = U^r x.$$

(iii) Για κάθε $x \in G,\ r > 0$ ισχύει

$$\frac{1}{c} r^D \leq |B(x, r)| \leq c r^D.$$

(iv) Υπάρχει $c > 0$, ώστε για κάθε $x \in \Gamma,\ r > 0$,

$$|B\,(x, 2r)\,| \leq c|B\,(x, r)\,|$$

(v) Υπάρχει $D > 0$ τέτοιο ώστε

$$|B\,(x, r)\,| \leq C \left(\frac{r}{s}\right)^D |B\,(x, s)\,|, \ \ \text{για κάθε } r \geq s > 0.$$

Απόδειξη. (i) Η $d(x, y)$ αποτελεί μετρική στην G, καθώς

(A)

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow xy^{-1} \in U^0 = \{e\} \Leftrightarrow xy^{-1} = e \Leftrightarrow x = y.$$

(B) Αν είναι $a \in U^n$, έχουμε ότι υπάρχουν $a_1, a_2, ..., a_n \in U$, τέτοια ώστε

$$a = a_1 \cdot a_2 \cdot .. \cdot a_n \Leftrightarrow a^{-1} = a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot .. \cdot a_1^{-1}$$

δηλαδή από τη συμμετρία του U έχουμε $a \in U^n \Leftrightarrow a^{-1} \in U^n$. Επομένως για κάθε $x, y \in G$, έχουμε

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |xy^{-1}| \\ &= \min\{n \in \mathbb{N};\ xy^{-1} \in U^n\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N};\ (xy^{-1})^{-1} \in U^n\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N};\ yx^{-1} \in U^n\} = d(y,x). \end{aligned}$$

(Γ) Αν τώρα είναι $x, y, z \in G$ και $d(x,z) = n,\ d(x,y) = m,\ d(y,z) = k$, θα έχουμε ότι

$$xz^{-1} = a_1 \cdot a_2 \cdot .. \cdot a_n,\ xy^{-1} = b_1 \cdot b_2 \cdot .. \cdot b_m,\ yz^{-1} = c_1 \cdot c_2 \cdot .. \cdot c_k,$$

για κάποιους

$$a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, .., b_m, c_1, c_2, ..., c_k \in U.$$

Επομένως

$$xz^{-1} = xy^{-1}yz^{-1} = b_1 \cdot b_2 \cdot .. \cdot b_m c_1 \cdot c_2 \cdot .. \cdot c_k$$

άρα

$$d(x,z) = n \leq m + k = d(x,y) + d(y,z).$$

(ii) Έστω $x \in G,\ r > 0$, τότε

$$\begin{aligned} y \in B(x,r) &\Leftrightarrow d(x,y) \leq r \\ &\Leftrightarrow |yx^{-1}| \leq r \\ &\Leftrightarrow yx^{-1} \in U^r \\ &\Leftrightarrow y \in U^r x. \end{aligned}$$

(iii) Έστω $x \in G,\ r > 0$.

$$|B(x,r)| = |U^r x| = |U^r|.$$

Από την (3.3.2) έχουμε

$$\frac{1}{c} r^D \leq |B(x,r)| \leq c r^D.$$

(iv) Έστω $x \in G,\ r \geq s > 0$. Από το (iii) έχουμε

$$|B(x,2r)| \leq c(2r)^D \leq c_1 r^D \leq c_2 |B(x,r)|.$$

(v) Αποδείξαμε την ιδιότητα διπλασιασμού του όγκου από την οποία προκύπτει η ζητούμενη σχέση όπως δείξαμε στο Κεφάλαιο 2.

□

Θα ορίσουμε και εδώ Μαρκοβιανούς πυρήνες όπως και στα γραφήματα.

Ορισμός 3.3.7. Θέτουμε $p_0(x,y) = \delta_y(x)$, τη συνάρτηση Dirac. Επίσης ορίζουμε τους πυρήνες

$$p_1(x,y) = p(x,y) = \mu(x^{-1}y),\ x,y \in G.$$

$$p_n(x,y) = \mu^{*n}(x^{-1}y),\ x,y \in G,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

όπου με $*$ συμβολίσαμε τη συνέλιξη των μέτρων μ,ν:

$$\mu * \nu(x) = \sum_{y\in G} \mu(y)\nu(x^{-1}y),\ x \in G.$$

Ορισμός 3.3.8. Ορίζουμε το γινόμενο πυρήνων $K(x,y),\ S(x,y)$, ως εξής

$$KS(x,y) = \sum_{z\in G} K(x,z)S(z,y),\ x,y \in G$$

Οι ιδιότητες των πυρήνων $p_n(x,y)$ συνοψίζονται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.9.

(i) $\quad p_n p = p_{n+1} = p p_n,\ n \in \mathbb{N}.$

(ii) $\quad$ *Οι πυρήνες p_n είναι συμμετρικοί.*

(iii) $\quad$ *Οι πυρήνες p_n είναι πυρήνες Markov,*

$$\text{δηλαδή } p_n(x,y) \geq 0,\ \text{και} \sum_{y\in G} p_n(x,y) = 1,\ x,y \in G,\ n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. (i) Άμεσα από τον ορισμό τους ως συνελίξεις.

(ii) Για $n = 1$, έχουμε για κάθε $x,y \in G$,

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \mu(x^{-1}y) \\ &= \mu((x^{-1}y)^{-1}) \\ &= \mu(y^{-1}x) \\ &= p(y,x) \end{aligned}$$

Επομένως ο p είναι συμμετρικός.

Αν δεχθούμε ότι ο p_n είναι συμμετρικός για κάποιον n φυσικό τότε θα έχουμε για κάθε $x, y \in G$,

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x,y) &= \mu^{*(n+1)}(x^{-1}y) \\ &= \sum_{z\in G} \mu(z)\mu^{*n}(y^{-1}xz). \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$u = xz \Leftrightarrow z = x^{-1}u$$

και τότε έχουμε,

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x,y) &= \sum_{u\in G} \mu(x^{-1}u)\mu^{*n}(y^{-1}u) \\ &= \sum_{u\in G} p(x,u)p_n(y,u) \\ &= \sum_{u\in G} p_n(y,u)p(u,x) \\ &= p_{n+1}(y,x) \end{aligned}$$

Δηλαδή οι πυρήνες p_n είναι συμμετρικοί.

(iii) Είναι προφανές ότι είναι μη αρνητικοί. Θα το αποδείξουμε επαγωγικά.

Για $n = 1$, έχουμε για κάθε $x \in G$,

$$\sum_{y\in G} p(x,y) = \sum_{y\in G} \mu(x^{-1}y).$$

Θέτουμε

$$z = x^{-1}y \Leftrightarrow y = xz$$

και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{y\in G} p(x,y) &= \sum_{z\in G}\mu(z)\\ &= \mu(G) = 1.\end{aligned}$$

Αν τώρα δεχθούμε για κάποιον φυσικό n τον ισχυρισμό μας τότε έχουμε για κάθε $x \in G$,

$$\begin{aligned}\sum_{y\in G} p_{n+1}(x,y) &= \sum_{y\in G}\sum_{u\in G} p_n(x,u)p(u,y)\\ &= \sum_{u\in G} p_n(x,u)\sum_{y\in G} p(u,y)\\ &= \sum_{u\in G} p_n(x,u)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Δηλαδή οι p_n είναι πυρήνες Markov.

□

Παρατήρηση 3.3.10. Οι πυρήνες $p_n(x,y)$ ικανοποιούν και πάλι την (3.2.4) (βλ. [34]), δηλαδή

$$p_n(x,y) \leq \frac{c}{|B(x,\sqrt{n})|}e^{-cd(x,y)^2/n},\ \text{για κάθε } x,y\in G,\ n\in\mathbb{N}^*. \tag{3.3.3}$$

Ορισμός 3.3.11. Θέτουμε τον τελεστή

$$Pf(x) = \sum_{y\in G} f(xy)\mu(y),\ x\in G,$$

για συναρτήσεις $f \in L^1(G)$.

Παρατήρηση 3.3.12. Αλλάζοντας τη μεταβλητή του αθροίσματος στην $z = x^{-1}y$, θα έχουμε για κάθε $x \in G,\ f \in L^1(G)$

$$Pf(x) = \sum_{z \in G} p(x,z) f(z).$$

Παρατήρηση 3.3.13. Για τις δυνάμεις του P προκύπτει ότι

$$P^n f(x) = \sum_{z \in G} p_n(x,z) f(z),\ x \in G,\ n \in \mathbb{N}.$$

Θεωρούμε το διακριτό ανάλογο L του τελεστή Laplace στη διακριτή ομάδα.

$$Lf(x) = (I - P)f(x) = f(x) - \sum_{y \in G} p(x,y) f(y),\ x \in G,$$

για συναρτήσεις $f \in L^1(G)$.

Παρατήρηση 3.3.14. Οι τελεστές P, L είναι και εδώ φραγμένοι στον L^2 με

$$||P||_{2\to 2} \le 1\ ,\ \ ||L||_{2\to 2} \le 2.$$

Είναι επίσης αυτοσυζυγείς στον L^2. Ισχύει για κάθε $f \in L^2$

$$\langle Lf, f\rangle = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in G} (f(x) - f(y))^2 \mu(x^{-1}y) \ge 0.$$

Δηλαδή ο L είναι και πάλι θετικός.

3.4 Διατύπωση του αποτελέσματος

Στο εξής θα συμβολίζουμε με Γ ένα γράφημα όπως στη δεύτερη παράγραφο ή μια διακριτή ομάδα όπως στην τρίτη και με L τον τελεστή που ορίσαμε σε κάθε περίπτωση. Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε ότι ο τελεστής L είναι φραγμένος, θετικός και αυτοσυζυγής στον χώρο Hilbert L^2 με

$$||L||_{2\to 2} \le 2.$$

Από το Φασματικό Θεώρημα, (βλ. [66]) έχουμε για το φάσμα του

$$\sigma(L) \subset [0,2].$$

Ο τελεστής L έχει τη φασματική αναπαράσταση

$$L = \int_0^2 \lambda dE_\lambda,$$

όπου dE_λ το φασματικό μέτρο του L.

Ορισμός 3.4.1. Για κάθε συνάρτηση $m(\lambda)$ φραγμένη και Borel μετρήσιμη, ορίζεται μέσω του Φασματικού Θεωρήματος ο τελεστής

$$m(L) = \int_0^2 m(\lambda) dE_\lambda,$$

που είναι φραγμένος στον L^2 με

$$||m(L)||_{2\to 2} \leq ||m||_\infty.$$

Η συνάρτηση $m(\lambda)$ θα καλείται πολλαπλασιαστής και ο τελεστής $m(L)$ φασματικός πολλαπλασιαστής.

Ορισμός 3.4.2. Έστω $\alpha, R > 0$. Καλούμε μέσο όρο Riesz τάξης α τον φασματικό πολλαπλασιαστή

$$m_{\alpha,R}(L) = \int_0^2 m_{\alpha,R}(\lambda) dE_\lambda,$$

όπου $m_{\alpha,R}(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{R}\right)_+^\alpha$.

Έστω Γ ένα γράφημα ή μια διακριτή ομάδα όπως έχουν οριστεί προηγουμένως. Θα αποδείξουμε ότι

Θεώρημα 3.4.3. *(i) Αν $\alpha > D/2$, τότε οι τελεστές $m_{\alpha,R}(L)$ είναι φραγμένοι στους L^p, για όλα τα $p \in [1, +\infty]$.*

(ii) Αν $\alpha \leq D/2$ τότε οι τελεστές $m_{\alpha,R}(L)$ είναι φραγμένοι στον L^p, για

$$\alpha > D\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|.$$

Παρατήρηση 3.4.4. Ειδικά στην περίπτωση που $\alpha = D/2$ ισχύει $\alpha > D\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$ για όλα τα $p \in (1, \infty)$, άρα το Θεώρημα 3.4.3 δίνει ότι ο $m_{D/2,R}(L)$ είναι φραγμένος σε όλους τους L^p, $p \in (1, \infty)$.

Παρατήρηση 3.4.5. Το ίδιο αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί όταν M είναι μια πολλαπλότητα Riemann με RicM ≥ 0 ή ομάδα Lie με πολυωνυμική αύξηση όγκου (βλ. [4]).

Παρατήρηση 3.4.6. Για τον τελεστή του Laplace ωστόσο στον $\mathbb{R}^D$ η κρίσιμη τιμή είναι η $(D-1)/2$ (βλ. [62]).

Παρατήρηση 3.4.7. Το γενικό θεώρημα των πολλαπλασιαστών έχουν αποδείξει ο Μαριάς με την Κυρέζη στο [38] για γραφήματα και ο Αλεξόπουλος στο [2] για διακριτές ομάδες. Η συνθήκη του θεωρήματος ικανοποιείται από τον πολλαπλασιαστή $m_{\alpha,R}(\lambda)$ όταν $\alpha > D/2$ και μας εξασφαλίζει τη συνέχεια στους L^p, $p \in (1,\infty)$. Εμείς για τον $m_{\alpha,R}(L)$ πιάνουμε και τις ακραίες τιμές $p = 1, p = \infty$. Καλύπτουμε την περίπτωση $\alpha = D/2$. Επιπλέον για $\alpha < D/2$ βρίσκουμε την L^p συνέχεια σε μιά ζώνη γύρω από το $p = 2$.

Παρατήρηση 3.4.8. Ο Ανέστης Φωτιάδης στηριζόμενος στο ότι οι τελεστές $m_{\alpha,R}(L), R > 0$ φράσονται ομοιόμορφα, αποδεικνύει μέσω του [23] ότι

Πόρισμα 3.4.9. *Αν α, p είναι όπως παραπάνω τότε για κάθε $f \in L^p$,*

$$||m_{\alpha,R}(L)f - f||_p \longrightarrow 0,\ R \to \infty.$$

3.5 Προετοιμασία για την απόδειξη

3.5.1 Διάσπαση του πολλαπλασιαστή

Θέτουμε $r = \sqrt{R}$ και θεωρούμε ακέραιο i τέτοιο ώστε

$$2^{(i-1)/2} < r \leq 2^{i/2}.$$

Θέτουμε και $I = |i|$. Θεωρούμε μια λεία συνάρτηση φ (βλ. για παράδειγμα [4]) τέτοια ώστε

$$supp(\varphi) \subseteq \Big[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\Big],\ \ \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(2^j x) = 1.$$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις

$$\varphi_j(\lambda) = \varphi\Big(2^j(|\lambda| - 1)\Big),\ \ j \geq 0.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\mathbf{r < 1}$. Διαιρούμε τον $m_{\alpha,R}$ σε όρους με συμπαγή φορέα,

$$m_{j,r}(\lambda) = m_{\alpha,R}(\lambda)\varphi_j\Big(\frac{\lambda}{r^2}\Big),\ j \geq 0.$$

Τότε

$$m_{\alpha,R}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} m_{j,r}(\lambda)\ ,\ \ m_{\alpha,R}(L) = \sum_{j=0}^{\infty} m_{j,r}(L). \tag{3.5.1}$$

Ορίζουμε τους πυρήνες Schwarz $K_{j,r}, K_{\alpha,R}$ των $m_{j,r}(L)$ και $m_{\alpha,R}(L)$, αντίστοιχα

$$K_{j,r}(x,y) = m_{j,r}(L)\delta_x(y),\ \ K_{\alpha,R}(x,y) = m_{\alpha,R}(L)\delta_x(y).$$

Έχουμε

$$K_{\alpha,R}(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{j,r}(x,y). \tag{3.5.2}$$

Θέτουμε

$$h_{j,r}(\lambda) = m_{j,r}(\lambda^2)(1-\lambda^2)^{-2^I},\ j \geq 0. \tag{3.5.3}$$

Τότε

$$m_{j,r}(\Delta) = h_{j,r}(\sqrt{L})P^{2^I},\ \ K_{j,r}(x,y) = [h_{j,r}(\sqrt{L})p_{2^I}(.,y)](x),\ j \geq 0. \tag{3.5.4}$$

Επαγωγικά προκύπτουν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\Big(\Big(1-\frac{\lambda^2}{r^2}\Big)^{\alpha}\Big)^{(2\nu)} = \sum_{k=0}^{\nu} c_{k,\nu}\frac{\lambda^{2k}}{r^{2k+2\nu}}\Big(1-\frac{\lambda^2}{r^2}\Big)^{\alpha-k-\nu},$$

$$\Big(\Big(1-\frac{\lambda^2}{r^2}\Big)^{\alpha}\Big)^{(2\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\nu} c_{k,\nu}\frac{\lambda^{2k+1}}{r^{2k+2\nu+2}}\Big(1-\frac{\lambda^2}{r^2}\Big)^{\alpha-k-\nu-1}.$$

Από τον ορισμό των $\varphi, h_{j,r}$, έχουμε ότι για κάθε $j \geq 0$, ισχύει

$$1-\frac{5}{2^{j+2}} \leq \frac{\lambda^2}{r^2} \leq 1-\frac{1}{2^j}.$$

Είναι τότε

$$\begin{aligned}
& 1-\frac{5}{2^{j+2}} \leq \frac{\lambda^2}{r^2} \leq 1-\frac{1}{2^j} \\
\Rightarrow\ \ & \frac{5}{2^{j+2}} \geq 1-\frac{\lambda^2}{r^2} \geq \frac{1}{2^j} \\
\Rightarrow\ \ & c_1 2^{-(\alpha-\nu)j} \leq \Big(1-\frac{\lambda^2}{r^2}\Big)^{\alpha-\nu} \leq c_2 2^{-(\alpha-\nu)j},\ \ \nu \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε αφού $|\lambda| \le r$,

$$\begin{aligned}
\left|\left(\left(1-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)^{\alpha}\right)^{(2\nu)}\right| &\le \sum_{k=0}^{\nu} |c_{k,\nu}| \frac{\lambda^{2k}}{r^{2k+2\nu}} \left|\left(1-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)^{\alpha-k-\nu}\right| \\
&\le c\sum_{k=0}^{\nu} r^{-2\nu} 2^{-(\alpha-k-\nu)j} \\
&= cr^{-2\nu} 2^{-(\alpha-\nu)j} \sum_{k=0}^{\nu} 2^{kj} \\
&\le cr^{-2\nu} 2^{-(\alpha-\nu)j} 2^{\nu j} \\
&= cr^{-2\nu} 2^{-(\alpha-2\nu)j}.
\end{aligned}$$

Ανάλογα είναι

$$\left|\left(\left(1-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)^{\alpha}\right)^{(2\nu+1)}\right| \le cr^{-2\nu-1} 2^{-(\alpha-2\nu-1)j},$$

ώστε συνολικά για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\left|\left(m_{\alpha,R}(\lambda^2)\right)^{(\nu)}\right| = \left|\left(\left(1-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)^{\alpha}\right)^{(\nu)}\right| \le c_\nu r^{-\nu} 2^{-(\alpha-\nu)j}.$$

Ανάλογα έχουμε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\left((1-\lambda^2)^{-2^I}\right)^{(2\nu)} = \sum_{k=0}^{\nu} c_{k,\nu} \lambda^{2k} \left(1-\lambda^2\right)^{-2^I-k-\nu},$$

$$\left((1-\lambda^2)^{-2^I}\right)^{(2\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\nu} c_{k,\nu} \lambda^{2k+1} \left(1-\lambda^2\right)^{-2^I-k-\nu-1},$$

$$\left|\left((1-\lambda^2)^{-2^I}\right)^{(\nu)}\right| \le c_\nu,$$

$$\left(\varphi_j\left(\frac{\lambda^2}{r^2}\right)\right)^{(2\nu)} = \sum_{k=0}^{\nu} c_{k,\nu} \frac{\lambda^{2k}}{r^{2k+2\nu}} \varphi_j^{(k+\nu)}\left(\frac{\lambda^2}{r^2}\right),$$

$$\left(\varphi_j\left(\frac{\lambda^2}{r^2}\right)\right)^{(2\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\nu} c_{k,\nu} \frac{\lambda^{2k}}{r^{2k+2\nu}} \varphi_j^{(k+\nu+1)}\left(\frac{\lambda^2}{r^2}\right),$$

$$\left|\left(\varphi_j\left(\frac{\lambda^2}{r^2}\right)\right)^{(\nu)}\right| \le c_\nu r^{-\nu}.$$

Από τον κανόνα Leibniz έχουμε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\Big|\Big[(1-\lambda^2)^{-2^I}\varphi_j\Big(\frac{\lambda^2}{r^2}\Big)\Big]^{(\nu)}\Big| \le c_\nu r^{-\nu},$$

και καθώς είναι

$$h_{j,r}(\lambda) = m_{j,r}(\lambda^2)(1-\lambda^2)^{-2^I} = m_{\alpha,R}(\lambda^2)\varphi_j\Big(\frac{\lambda^2}{r^2}\Big)(1-\lambda^2)^{-2^I},$$

θα έχουμε από τον κανόνα Leibniz

$$\begin{aligned} |h_{j,r}^{(\nu)}(\lambda)| &\le \sum_{k=0}^{\nu} |c_{k,\nu}| r^{-(\nu-k)} r^{-k} 2^{-(\alpha-k)j} \\ &\le cr^{-\nu}2^{-\alpha j}\sum_{k=0}^{\nu} 2^{kj} \\ &\le cr^{-\nu}2^{-(\alpha-\nu)j}. \end{aligned}$$

Συνολικά

$$|supp(h_{j,r})| \le cr2^{-j} \ \ , \ \ ||h_{j,r}^{(k)}||_\infty \le c_k r^{-k}2^{-(\alpha-k)j} \ , \ k,j\ge 0. \tag{3.5.5}$$

Περίπτωση 2: $\mathbf{r=1}$. Διαιρούμε τον $m_{\alpha,1}$ ως εξής

$$m_{j,1}(\lambda) = m_{\alpha,1}(\lambda)\varphi_j(\lambda)\ ,\ \ h_{j,1}(\lambda) = m_{j,1}(\lambda^2),\ \ j\ge 0.$$

Αν $K_{j,1}(x,y)$ είναι οι πυρήνες των $m_{j,1}(\Delta)$ τότε έχουμε

$$m_{j,1}(L) = h_{j,1}(\sqrt{\Delta}) \ \ , \ \ K_{j,1}(x,y) = [h_{j,1}(\sqrt{L})p_0(.,y)](x),\ j\ge 0. \tag{3.5.6}$$

Παίρνουμε και πάλι τις σχέσεις (3.5.1), (3.5.2) και (3.5.5) για $r=1$.

Περίπτωση 3: $\mathbf{r>1}$.

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε την λεία συνάρτηση Θ_r με

$$\Theta_r(t)=1,\ \ |t|\le \frac{r+3}{4r^2}\ \text{ και }\ \Theta_r(t)=0,\ \ |t|\ge\frac{r+1}{2r^2}.$$

Γράφουμε τότε

$$m_{\alpha,R} = m_{-1,r}+m_{\infty,r},$$

όπου

$$m_{-1,r}(\lambda) = m_{\alpha,R}(\lambda)\Theta_r\Big(\frac{\lambda}{r^2}\Big), \ \ m_{\infty,r}(\lambda) = m_{\alpha,R}(\lambda)\Big(1-\Theta_r\Big(\frac{\lambda}{r^2}\Big)\Big).$$

Τότε

•Το 1 είναι έξω από το φορέα της $m_{\infty,r}(\lambda)$.

• Είναι $m_{-1,r}(\lambda) \in \mathcal{C}_0^\infty$. Τότε (βλ. [2] σελ. 420, για την περίπτωση της διακριτής ομάδας και [38] σελ. 1058, για τα γραφήματα), ο πυρήνας του $m_{-1,r}(L)$ είναι στον L^1. Έτσι ο $m_{-1,r}(L)$ είναι φραγμένος στον L^p για όλα τα $p \in [1,\infty]$.

Μένει επομένως να ασχοληθούμε μόνο με τον $m_{\infty,r}(L)$. Θέτουμε όπως στην περίπτωση 1,

$$m_{j,r}(\lambda) = m_{\infty,r}(\lambda)\varphi_j\Big(\frac{\lambda}{r^2}\Big)\ , \ \ h_{j,r}(\lambda) = m_{j,r}(\lambda^2)(1-\lambda^2)^{-2^I},\ j \geq 0.$$

Ας είναι $K_{\infty,r}(x,y), K_{j,r}(x,y)$ οι πυρήνες των $m_{\infty,r}(L), m_{j,r}(L)$ αντίστοιχα. Τότε οι σχέσεις (3.5.4), (3.5.5) εξακολουθούν να ισχύουν και έχουμε

$$m_{\infty,r}(L) = \sum_{j=0}^{\infty} m_{j,r}(L)\ \ ,\ \ K_{\infty,r}(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{j,r}(x,y). \tag{3.5.7}$$

3.5.2 Προσεγγιστικό Λήμμα

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο προσεγγιστικό λήμμα [21, 51].

Λήμμα 3.5.1. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1]$ και $A = n+\varepsilon$. Για $f \in C_0^n(\mathbb{R})$ άρτια συνάρτηση, θέτουμε*

$$M_A(f) = \sup\left\{\frac{|f^{(n)}(x+t) - f^{(n)}(x)|}{t^\varepsilon};\ t>0,\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Τότε υπάρχει σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να υπάρχει πολυώνυμο Q με όρους άρτιας μόνο τάξης, τέτοιο ώστε

$$deqQ \leq 2k\ ,\ \ ||f-Q||_\infty \leq \frac{cM_A(f)}{k^A}.$$

Παρατήρηση 3.5.2. Το $Q(\sqrt{\lambda})$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k. Θα έχει δηλαδή τη μορφή

$$Q(\sqrt{\lambda}) = b_0 + b_1\lambda + ... + b_k\lambda^k.$$

Είναι $L = I - P$. Από το διωνυμικό τύπο έχουμε

$$L^\nu = (I-P)^\nu = c_0 I + c_1 P + ... + c_\nu P^\nu, \ \ \nu \in \mathbb{N}.$$

Έχουμε επομένως

$$Q(\sqrt{L}) = b_0 I + b_1 L + ... + b_k L^k = a_0 I + a_1 P + ... + a_k P^k.$$

Λήμμα 3.5.3. *Ας είναι g συνάρτηση με $supp(g) \subseteq B(x,r)$ τότε*

$$supp(Q(\sqrt{\Delta})g) \subseteq B(x, r+k). \tag{3.5.8}$$

Απόδειξη.

Αν το Γ είναι γράφημα. Ισχύει

$$\begin{aligned} Pg(z) &= \sum_{y \in B(x,r)} p(z,y) g(y) \mu_y \\ &= \sum_{y \in B(x,r)} \frac{\sigma(z,y) g(y)}{\mu_z}. \end{aligned}$$

Είναι επομένως

$$\begin{aligned} z \in supp(Pg) &\Rightarrow Pg(z) \neq 0 \\ &\Rightarrow \sigma(z,y) > 0, \text{ για κάποιο } y \in B(x,r) \\ &\Rightarrow z \sim y, \text{ για κάποιο } y \in B(x,r) \\ &\Rightarrow d(z,y) \leq 1, \text{ για κάποιο } y \in B(x,r) \\ &\Rightarrow d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) \leq r+1 \\ &\Rightarrow z \in B(x, r+1), \end{aligned}$$

δηλαδή $supp(Pg) \subseteq B(x, r+1)$, που δίνει συνεχίζοντας επαγωγικά $supp(P^n g) \subseteq B(x, r+n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$supp(Q(\sqrt{L})g) \subseteq B(x, r+k).$$

Αν το Γ είναι διακριτή ομάδα.

Ισχύει

$$\begin{aligned} Pg(z) &= \sum_{y\in B(x,r)} p(z,y)g(y) \\ &= \sum_{y\in B(x,r)} \mu(zy^{-1})g(y). \end{aligned}$$

Είναι επομένως αν θυμηθούμε την υπόθεση ότι $supp(\mu) \subseteq U$,

$$\begin{aligned} z \in supp(Pg) &\Rightarrow Pg(z) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mu(zy^{-1}) > 0, \text{ για κάποιο } y \in B(x,r) \\ &\Rightarrow zy^{-1} \in U = U^1, \text{ για κάποιο } y \in B(x,r) \\ &\Rightarrow d(z,y) \leq 1, \text{ για κάποιο } y \in B(x,r) \\ &\Rightarrow d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) \leq r+1 \\ &\Rightarrow z \in B(x,r+1), \end{aligned}$$

καταλήγουμε στη (3.5.8) όπως πρίν.

□

Παρατήρηση 3.5.4. Η παραπάνω σχέση είναι που θα υποκαταστήσει την ιδιότητα της πεπερασμένης ταχύτητας διάδοσης που δεν έχει το διακριτό ανάλογο του τελεστή των κυμάτων ([12, 2, 38]).

3.6 Εκτιμήσεις των πυρήνων

3.6.1 Εκτιμήσεις των $p_n(x,y)$.

Λήμμα 3.6.1. *Αν $q \in \mathbb{N}$, $q \geq I$, τότε υπάρχει σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε για κάθε $y \in \Gamma$*

$$(i)\ \ ||p_{2^I}(.,y)||_2 \leq \frac{c}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}}.$$

$$(ii)\ \ ||p_{2^I}(.,y)||_{L^2(B(y,2^{q/2})^c)} \leq \frac{ce^{-c2^{q-I}}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}}.$$

Απόδειξη. (i) Από τη σχέση (3.2.4) και τη (3.2.2) έχουμε

$$\begin{aligned}
||p_{2^I}(.,y)||_2^2 &= \sum_{x\in\Gamma} p_{2^I}(x,y)^2\mu(x) \\
&= p_{2\cdot 2^I}(y,y) \\
&\leq \frac{c}{|B(y,\sqrt{2\cdot 2^I})|} \\
&\leq \frac{c}{|B(y,2^{I/2})|}.
\end{aligned}$$

(ii) Θέτουμε

$$A_s(y) = B(y, 2^{(s+1)/2}) - B(y, 2^{s/2}),\ s \in \mathbb{N}\ ,\ y \in \Gamma.$$

Είναι

$$B(y, 2^{q/2})^c = \bigcup_{s=q}^{\infty} A_s(y).$$

Από τη σχέση (3.2.4) και τη (3.2.2) έχουμε καθώς ισχύει

$$x \in A_s(y) \Rightarrow d(x,y) > 2^{s/2},$$

$$\begin{aligned}
||p_{2^I}(.,y)||_{L^2(A_s(y))}^2 &\leq \sum_{x\in A_s(y)} \frac{c}{|B(y,\sqrt{2^I})|^2} e^{-2cd(x,y)^2/2^I}\mu_x \\
&\leq \frac{c}{|B(y,\sqrt{2^I})|^2} e^{-c2^{(s-I)}} \sum_{x\in A_s(y)} \mu_x \\
&= \frac{c}{|B(y,\sqrt{2^I})|^2} e^{-c2^{(s-I)}} |A_s(y)| \\
&\leq \frac{c}{|B(y,2^{I/2})|} e^{-c2^{(s-I)}} \frac{|B(y,2^{(s+1)/2})|}{|B(y,2^{I/2})|} \\
&\leq \frac{c}{|B(y,2^{I/2})|} e^{-c2^{(s-I)}} 2^{D(s-I)/2} \\
&\leq \frac{ce^{-c2^{(s-I)}}}{|B(y,2^{I/2})|}.
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$||p_{2^I}(.,y)||_{L^2(A_s(y))} \leq \frac{ce^{-c2^{(s-I)}}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}}$$

και αθροίζοντας για $s \geq q$ παίρνουμε

$$||p_{2^I}(.,y)||_{L^2(B(y,2^{q/2})^c)} \leq \sum_{s=q}^{\infty} \frac{ce^{-c2^{(s-I)}}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}} \leq \frac{ce^{-c2^{(q-I)}}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}}.$$

□

3.6.2 Εκτιμήσεις των $K_{j,r}(x,y)$.

Λήμμα 3.6.2. *Αν $j,q \in \mathbb{N}$, $q \geq I$, τότε για κάθε $A > 0$, $y \in \Gamma$ υπάρχει σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε*

$$(i)\ \ ||K_{j,r}(.,y)||_2 \leq \frac{c2^{-\alpha j}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}}.$$

$$(ii)\ \ ||K_{j,r}(.,y)||_{L^2(A_q(y))} \leq \frac{c2^{-A(q-I)/2}2^{-(\alpha-A)j}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}}.$$

Απόδειξη. (i) Από τις σχέσεις (3.5.4), (3.5.5), το Λήμμα 3.6.1 και την (3.2.2) έχουμε για $r \neq 1$,

$$\begin{aligned}||K_{j,r}(.,y)||_2 &= ||h_{j,r}(\sqrt{L})p_{2^I}(.,y)||_2\\ &\leq ||h_{j,r}||_\infty ||p_{2^I}(.,y)||_2\\ &\leq \frac{c2^{-\alpha j}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}}.\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3.5.6), (3.5.5) και την (3.2.2) είναι και για $r = 1$ (οπότε είναι $I = 0$),

$$\begin{aligned}||K_{j,1}(.,y)||_2 &= ||h_{j,1}(\sqrt{L})p_0(.,y)||_2\\ &\leq ||h_{j,1}||_\infty ||p_0(.y)||_2\\ &\leq c2^{-\alpha j}|B(y,1)|^{-1/2}\\ &= \frac{c2^{-\alpha j}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}}.\end{aligned}$$

(ii) Από το Λήμμα 3.5.1 έστω Q πολυώνυμο με

$$degQ \leq 2^{q/2}\ ,\ \ ||h_{j,r} - Q||_\infty \leq cM_A(h_{j,r})2^{-A(q-2)/2}. \tag{3.6.1}$$

Για $A = n + \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1]$ και για $x, x+t \in \mathrm{supp}(h_{j,r})$, $t > 0$, υπάρχει από το Θεώρημα της μέσης τιμής $\xi \in (x, x+t)$, τέτοιο ώστε

$$h_{j,r}^{(n)}(x+t) - h_{j,r}^{(n)}(x) = h_{j,r}^{(n+1)}(\xi)t.$$

Από τη σχέση (3.5.5) έχουμε τότε,

$$\begin{aligned}
\frac{|h_{j,r}^{(n)}(x+t)-h_{j,r}^{(n)}(x)|}{t^{\varepsilon}} &= |h_{j,r}^{(n+1)}(\xi)|t^{1-\varepsilon} \\
&\leq ||h_{j,r}^{(n+1)}||_{\infty}|supp(h_{j,r})|^{1-\varepsilon} \\
&\leq cr^{-n-1}2^{-(\alpha-n-1)j}r^{1-\varepsilon}2^{-j(1-\varepsilon)} \\
&= cr^{-n-\varepsilon}2^{-(\alpha-n-\varepsilon)j} \\
&= cr^{-A}2^{-(\alpha-A)j}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$M_A(h_{j,r}) \leq cr^{-A}2^{-(\alpha-A)j}. \tag{3.6.2}$$

Άρα οι σχέσεις (3.6.1), (3.6.2) δίνουν

$$||h_{j,r}-Q||_{\infty} \leq c2^{-A(q-I)/2}2^{-(\alpha-A)j}. \tag{3.6.3}$$

Τότε η σχέση (3.5.8) δίνει ότι

$$supp(Q(\sqrt{L})\mathbf{1}_{B(y,2^{(q-2)/2})}) \subseteq B(y,2^{q/2}).$$

Από τις σχέσεις (3.5.4), (3.6.3), (3.5.5) και το Λήμμα 3.6.1 έχουμε όταν $r \neq 1$,

$$\begin{aligned}
||K_{j,r}(.,y)||_{L^2(A_q(y))} &\leq ||h_{j,r}(\sqrt{L})\Big(\mathbf{1}_{B(y,2^{(q-2)/2})}p_{2^I}(.,y)\Big)||_{L^2(A_q(y))} \\
&+ ||h_{j,r}(\sqrt{L})\Big(\mathbf{1}_{B(y,2^{(q-2)/2})^c}p_{2^I}(.,y)\Big)||_{L^2(A_q(y))} \\
&\leq ||(h_{j,r}-Q)(\sqrt{L})\Big(\mathbf{1}_{B(y,2^{(q-2)/2})}p_{2^I}(.,y)\Big)||_{L^2(A_q(y))} \\
&+ ||h_{j,r}(\sqrt{L})\Big(\mathbf{1}_{B(y,2^{(q-2)/2})^c}p_{2^I}(.,y)\Big)||_{L^2(A_q(y))} \\
&\leq ||h_{j,r}-Q||_{\infty}\cdot||p_{2^I}(.,y)||_2 + ||h_{j,r}||_{\infty}\cdot||\mathbf{1}_{B(y,2^{(q-2)/2})^c}p_{2^I}(.,y)||_2 \\
&\leq \frac{c2^{-A(q-I)/2}2^{-(\alpha-A)j}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}} + \frac{c2^{-\alpha j}e^{-c2^{q-I}}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}} \\
&\leq \frac{c2^{-A(q-I)/2}2^{-(\alpha-A)j}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}}.
\end{aligned}$$

Από τη σχέση (3.5.8) έχουμε ότι

$$supp(Q(\sqrt{\Delta})p_0(.,y)) \subseteq B(y,2^{q/2}).$$

Από την (3.2.4) παίρνουμε

$$||p_0(.,y)||_2 \leq c|B(y,1)|^{-1/2}.$$

Για $r = 1$ είναι $I = 0$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.5.6), (3.6.3) και το Λήμμα 3.6.1 παίρνουμε και σε αυτήν την περίπτωση

$$\begin{aligned}
||K_{j,1}(.,y)||_{L^2(A_q(y))} &\leq ||(h_{j,1}-Q)(\sqrt{L})p_0(.,y)||_{L^2(A_q(y))} \\
&\leq ||h_{j,1}-Q||_\infty ||p_0(.,y)||_2 \\
&\leq c2^{-Aq/2}2^{-(\alpha-A)j}|B(y,1)|^{-1/2} \\
&= \frac{c2^{-A(q-I)/2}2^{-(\alpha-A)j}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}}.
\end{aligned}$$

□

3.7 Απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.3

Απόδειξη. Από την ανισότητα των Cauchy-Scwarz, το πρώτο σκέλος από το Λήμμα 3.6.2 και την (3.2.2) έχουμε

$$\begin{aligned}
||K_{j,r}(.,y)||_{L^1(B(y,2^{(2j+I)/2}))} &\leq |B(y,2^{(2j+I)/2})|^{1/2}||K_{j,r}(.,y)||_2 \\
&\leq c|B(y,2^{(2j+I)/2})|^{1/2}2^{-\alpha j}|B(y,2^{I/2})|^{-1/2} \\
&\leq c2^{-(\alpha-D/2)j}.
\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

$$||K_{j,r}(.,y)||_{L^1(B(y,2^{(2j+I)/2})^c)} \leq \sum_{q=2j+I}^{\infty} ||K_{j,r}(.,y)||_{L^1(A_q(y))}.$$

Από το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 3.6.2, την ανισότητα των Cauchy-Scwarz και την (3.2.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
||K_{j,r}(.,y)||_{L^1(A_q(y))} &\leq |A_q(y)|^{1/2}||K_{j,r}(.,y)||_{L^2(A_q(y))} \\
&\leq c2^{-A(q-I)/2}2^{-(\alpha-A)j}\frac{\sqrt{|B(y,2^{(q+1)/2})|}}{\sqrt{|B(y,2^{I/2})|}} \\
&\leq c2^{-A(q-I)/2}2^{-(\alpha-A)j}2^{D(q-I)/4} \\
&= c2^{-\left(A-\frac{D}{2}\right)(q-I)/2}2^{-(\alpha-A)j}.
\end{aligned}$$

Συνολικά έχουμε διαλέγοντας $A > D/2$,

$$\begin{aligned} ||K_{j,r}(.,y)||_{L^1(B(y,2^{(2j+I)/2})^c)} &\leq \sum_{q=2j+I}^{\infty} ||K_{j,r}(.,y)||_{L^1(A_q(y))} \\ &\leq c2^{-(\alpha-A)j} \sum_{q=2j+I}^{\infty} 2^{-\left(A-\frac{D}{2}\right)(q-I)/2} \\ &\leq c2^{-(\alpha-A)j} 2^{-\left(A-\frac{D}{2}\right)j} \\ &= c2^{-\left(\alpha-\frac{D}{2}\right)j}. \end{aligned}$$

Καταλήξαμε επομένως ότι για κάθε $r > 0$,

$$||K_{j,r}(.,y)||_1 \leq c2^{-(\alpha-D/2)j}. \tag{3.7.1}$$

(i) Αθροίζουμε στη σχέση (3.7.1) ως προς j έχοντας υποθέσει ότι $\alpha > D/2$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned} ||K_{\alpha,R}(.,y)||_1 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} ||K_{j,r}(.,y)||_1 \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} c2^{-(\alpha-D/2)j} \\ &\leq c. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα συνάρτηση $f \in L^{\infty}$, $y \in \Gamma$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \Big| m_{\alpha,R}(L)f(y) \Big| &= \Big| \sum_{x\in\Gamma} K_{\alpha,R}(x,y)f(x)\mu_x \Big| \\ &\leq \sum_{x\in\Gamma} |K_{\alpha,R}(x,y)||f(x)|\mu_x \\ &\leq ||f||_{\infty} \sum_{x\in\Gamma} |K_{\alpha,R}(x,y)|\mu_x \\ &\leq ||f||_{\infty} ||K_{\alpha,R}(.,y)||_1 \\ &\leq c||f||_{\infty}. \end{aligned}$$

Δηλαδή ο τελεστής $m_{\alpha,R}(L)$ είναι φραγμένος στον L^{∞}.

Από το φασματικό θεώρημα είναι και L^2-φραγμένος, άρα από παρεμβολή και δυικότητα έχουμε ότι οι μέσοι όροι Riesz $m_{\alpha,R}(\Delta)$ είναι φραγμένοι στους L^p, για κάθε $p \in [1,+\infty]$.

(ii) Ας είναι $f \in L^1$. Για κάθε j η σχέση (3.7.1) δίνει ότι οι πυρήνες $K_{j,r}(x,y)$ είναι στον L^1. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
||m_{j,r}(L)f||_1 &= \sum_{x\in\Gamma}\Big|m_{j,r}(L)f(x)\Big|\mu_x \\
&= \sum_{x\in\Gamma}\Big|\sum_{y\in\Gamma}K_{j,r}(x,y)f(y)\mu_y\Big|\mu_x \\
&\leq \sum_{x\in\Gamma}\sum_{y\in\Gamma}|K_{j,r}(x,y)||f(y)|\mu_y\mu_x \\
&= \sum_{y\in\Gamma}|f(y)|\Big(\sum_{x\in\Gamma}|K_{j,r}(x,y)|\mu_x\Big)\mu_y \\
&= \sum_{y\in\Gamma}|f(y)|||K_{j,r}(.,y)||_1\mu_y \\
&\leq c2^{-(\alpha-D/2)j}\sum_{y\in\Gamma}|f(y)|\mu_y \\
&= 2^{-(\alpha-D/2)j}||f||_1.
\end{aligned}$$

Δηλαδή έχουμε

$$||m_{j,r}(L)||_{1\to 1} \leq c2^{-(\alpha-D/2)j}. \tag{3.7.2}$$

Από το Φασματικό Θεώρημα έχουμε ότι

$$||m_{j,r}(L)||_{2\to 2} \leq ||m_{j,r}||_\infty \leq c2^{-\alpha j}. \tag{3.7.3}$$

Ας είναι τώρα $1 < p < 2$ και $0 < t < 1$, τέτοια ώστε

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{1} + \frac{1-t}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2}{p} - 1.$$

Από παρεμβολή και τις σχέσεις (3.7.2) και (3.7.3) έχουμε

$$\begin{aligned}
||m_{j,r}(L)||_{p\to p} &\leq ||m_{j,r}(L)||_{1\to 1}^t ||m_{j,r}(L)||_{2\to 2}^{1-t} \\
&\leq c2^{-(\alpha-D/2)j\left(\frac{2}{p}-1\right)}2^{-\alpha j\left(-\frac{2}{p}+2\right)} \\
&= c2^{-\left(\alpha-D\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\right)j}.
\end{aligned}$$

Αθροίζουμε ως προς j και χρησιμοποιώντας την υπόθεση

$$\alpha > D\Big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big|$$

και από τις σχέσεις (3.5.1) ή (3.5.7), έχουμε ότι ο τελεστής $m_{\alpha,R}(L)$ είναι φραγμένος στον L^p. Θα είναι επομένως φραγμένος και στο δυικό του. Συνολικά είναι φραγμένος σε όλους τους L^p για τα p που ικανοποιούν την

$$\alpha > D\Big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big|.$$

□

Βιβλιογραφία

[1] G. Alexopoulos, Spectral multipliers on Lie groups of polynomial volume growth, *P.A.M.S.* **120**,(1994) 973-979.

[2] G. Alexopoulos, Spectral multipliers on discrete groups, *Bull. London Math. Soc.*, **33**, (2001), 417-424.

[3] G. Alexopoulos, Spectral multipliers for Markov chains, *J. Math. Soc. Japan*, **56**, (2004), 833-852.

[4] G. Alexopoulos and N. Lohoué, Riesz means on Lie groups and Riemannian manifolds of nonnegative curvature *Bull. Soc. Math. France.*, **122**, (1994), 209-223.

[5] J.-Ph. Anker, L^p Fourier multipliers on Riemannian symmetric spaces of non-compact type, *Ann. of Math.*, **132**, (1990), 597-628.

[6] H. Bass., The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups, *Proc. Lond. M. S.*, **25**, (1972)1303-1354.

[7] P. Berard, *Riesz means on Riemmanian Manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math.,**36**, (1980)

[8] R.L. Bishop and R.J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, N.York, 1964.

[9] W. M. Boothby, *An Introduction To Differentiable Manifolds And Riemannian Geometry*, Academic Press, N.York, 1986.

[10] L. Carleson and P. Sjölin, Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc, Studia Math. 44 (1972), 287-299

[11] A.P. Calderón, A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution II, *Adv. Math.*, **24**, (1977), 101-171.

[12] T.K. Carne. A transmutation formula for Markov chains, *Bull. Sci. Math.*, **106**, (1985), 399-405.

[13] M. Christ, L^p bounds for spectral multipliers on nilpotent groups, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **328**, (1991), 73-81.

[14] M. Christ, Weak type endpoint bounds for Boncher-Riesz operators, *Ann. of math.*, **128**, (1988), 19-42.

[15] M. Christ and C. Sogge, Weak type L^1 convergence of eigenfunction expansions for pseudodifferential operators, *Invent. Math.*, **94**, (1988), 421-453.

[16] Clerc J.-L., Sommes de Riesz et nultiplicateurs sur un groupe de Lie compact, *Ann. inst. Four.*, **24**, (1974), 149-172.

[17] R.R. Coifman, G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**, (1977), 569-645.

[18] T. Coulhon, *Random walks and geometry on infinite graphs*, Lectures notes on analysis on metric spaces, Trento, C.I.R.M., 1999, Luigi Ambrosio, Francesco Serra Cassano, ed., Scuola Normale Superiore di Pisa, (2000), 5-23.

[19] N.Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon, Analysis and geometry on groups *Cambr. tracts in math. Cambr. Univ. press*, N.Y. (1992).

[20] Davies K.M. and Chang Y.-C., Lectures on Boncher-Riesz means, *Lond. math. soc. Lectures notes series, Cambridge University Press*, **114**,

[21] T. Delmotte, *Parabolic Harnack inequality and estimates of Markov chains on graphs*, Rev. Mat. Iberoamericana, **15**, (1999), 181-232.2000b:35103

[22] L. De-Michele, G. Mauceri, H^p multipliers on stratified groups, *Ann. Mat. Pura Appl.*,**148**, (1987), 353-366.

[23] X.T. Duong, E.M. Ouhabaz, A. Sikora, Plancherel type estimates and sharp spectral multipliers , *J. Func. Anal.*, **196**, (2002), 443-485.

[24] C. Feffermann, Inequalities for strongly singular convolution operators , *Acta Math.*, **124**, (1970), 9-36.

[25] C. Feffermann and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, *Acta Math.*, **129**, (1972), 137-193.

[26] A.Fotiadis and A.G.Georgiadis, Riesz means on graphs and discrete groups, (2011) submitted.

[27] A.Fotiadis and M.Marias, Multipliers on rank one locally symmetric spaces, *Math. Zeit.*, **265** (2009) 277-284.

[28] A.G.Georgiadis, H^p-bounds for spectral multipliers on Riemmanian manifolds, *Bull. Sci. math.*, **134** (2010) 750-766.

[29] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **53** (1981) 53-78.

[30] Giulini L. and Travaglini G., Estimates for Riesz kernel of eigenfunctions of elliptic differential operators on compact manifolds, *J. Funct. Anal.*, **96**, (1991), 1-30.

[31] A. A. Grigorýan, The heat equation on noncompact Riemannian manifold, *Mat. Sb.*, (182):1 (1991), 55-87 (Russian). English transl.:Math USSR-Sb. 72 (1992), 47-77.

[32] Y Guivarch, Croissance polynomiale et periodes de fonctions harmoniques, *Bull. Sci. Math.*, **101**, (1973), 149-152.

[33] W. Hebisch, Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups, *Coll. Math.*, **65**, (1993), 231-239.

[34] W. Hebisch, L. Saloff-Coste, Gaussian estimates for Markov chains and random walks on groups, *Ann. Probab.*, **21**, (1993), 673-709.

[35] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, *Acta Math.*, **104**, (1960), 93-139.

[36] L. Hörmander, On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators, *Yeshiva Univ. N.Y.*, (1966), 155-202.

[37] Hulanicki A. and Jenkins J-W., Almost everywhere summability on manifolds, *Trans. A.M.S.*, **278**, (1983), 703-715.

[38] J. Kyrezi, M. Marias, H^p-bounds for spectral multipliers on graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**, (2009), 1053-1067.

[39] J. Kyrezi, M. Marias, H^1-bounds for spectral multipliers on graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**, (2004), 1311-1320.

[40] H.-Q. Li, Estimations L^p des fonctions du Laplacien sur les variétés cuspidales, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2004), 337–354.

[41] P. Li and S.-T. Yau, On the parabolic kernel of the Schrödinger operator, *Acta Math.*, **156**, (1985), 153-201.

[42] C.-C. Lin, Hörmander's H^p multiplier theorem for the Heisenberg group, *J. London Math. Soc.*, **67**, (2003), 686-700.

[43] N. Lohoué, M. Marias, Invariants géométriques des espaces localement symétriques et théorèmes de multiplicateurs, *Math. Ann.*, **343** (2009), 639-667.

[44] N. Mandouvalos, M. Marias, Spectral multipliers on Kleinian groups, in *Complex and Harmonic Analysis, Proceedings of an International Conference,* Thessaloniki, (2006), DES*tech* Publications, Lancaster, PA, 2007.

[45] M. Marias, L^p-boundedness of oscillating spectral multipliers on Riemannian manifolds, *Ann. Math. Blaise Pascal*, **10**, (2003), 133-160.

[46] M. Marias and E. Russ, H^1-boundedness of Riesz transforms and imaginary powers of the Laplacian on Riemannian manifolds, *Ark. Mat.*, **41**, (2003), 115-132.

[47] S. G. Mikhlin, *Multidimensional singular integral and integral equations*, Pergamon Press, Oxford, 1965.

[48] D. Müller, E.M. Stein, On spectral multipliers for Heisenberg and related groups, *J. Math. Pures Appl.*, **73**, (1994), 413-440.

[49] Mauceri G., Maximal operators and riesz means on stratified groups, *Sympos . Math.*, **29**, (1984), 47-62.

[50] Mauceri G. and Meda S., Vector values multipliers on stratified groups, *Rev. Math. Iberoamericana*, **6**, (1990), 141-154.

[51] I.P.Natanson, Constructive function theory, vol.1 *Uniform approximation, Frederick Unigard, N.Y.*, (1964).

[52] S. Rosenberg, *The Laplacian on a Riemannian manifold*, London mathematical society, student texts 31 (1997).

[53] E. Russ, $H^1 - L^1$ boundedness of Riesz transform on Riemannian manifolds and on graphs, *Potential Anal.*, **14**, (2001), 301-330.

[54] E. Russ, *$H^1 - L^1$ boundedness of Riesz transforms on Riemannian manifolds and on graphs*, Potential Anal., **14**, (2001), 301-330.2003b:42029

[55] L. Saloff-Coste, Parabolic Harnack inequality for divergence form second order differential operators, *Potential Analysis.*, **4** (1995), 429-467.

[56] L. Saloff-Coste, Analyse sur les groupes de Lie a croissance polynomiale, *Ark. Math.*, **28** (1990), 315-331.

[57] Seeger A., Endpoint estimates for multiplier transformations on compact manifolds, *Indian. Un. Math. J.*, **40** (1991), 471-533.

[58] M.A. Shubin, *Spectral theory of elliptic operators on noncompact manifolds*, Astérisque, (207):35-108, 1992.

[59] Sogge C., On the convergence of Riesz means on compact manifolds, *Ann. Math.*, **126**, (1987), 439-447.

[60] Stein E.,Localization and summability of multiple Fourier series, *Acta Math.*, **100** (1958), 93-147.

[61] Stein E. and Weiss G.,Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, *Prinst. Un. press.*, (1971).

[62] Stein E.,Harmonic analysis. Real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals, *Prinst. Un. Press.*, (1993).

[63] R. Schoen and S.T. Yau, Lectures on differential geometry, *International Press*, (1994).

[64] M. E. Taylor, *L^p estimates on functions of the Laplace operator*, Duke. Math. J., **58**, (1989), 773-793.

[65] N.Th. Varopoulos, Analysis on Lie groups *J. func. anal*, **76**, (1988), 346-410.

[66] K. Yosida, Functional *Springer, Berlin, 1978.*